

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**БУЛАШЕНКО А. В., ЯСТРЕБОВ М. І.**

# **ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ**

## **ЗБІРНИК ЗАДАЧ**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для студентів,  
які навчаються за спеціальністю 172 «Телекомунікації та радіотехніка»*

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2019

Рецензент Вишневий Сергій Валерійович, к-т техн. наук, ст. викладач.

За редакцією укладачів

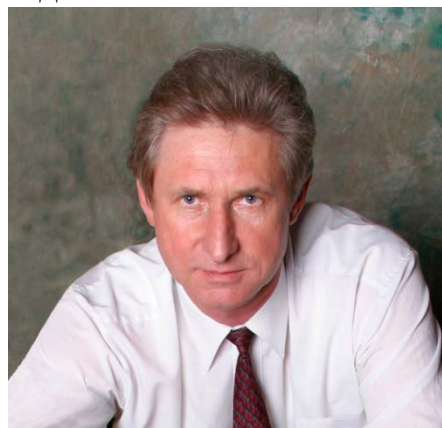
*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 03 від 28.11.2019 р.) за поданням Вченої ради радіотехнічного факультету (протокол № 11/2019 від 25.11.2019 р.)*

Електронне мережне навчальне видання



Булашенко А. В.

Місце для автографу



Ястребов М. І.

*Булашенко Андрій Васильович, ст. викладач  
Ястребов Микола Ігоревич, ст. викладач*

## **ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ. ЗБІРНИК ЗАДАЧ**

Основи теорії кіл. Збірник задач [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А. В. Булашенко, М. І. Ястребов; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 2.181 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 128с.

Збірник задач містить умови задач, що виконуються на практичних заняттях кредитного модуля «Основи теорії кіл» та мають на меті одержання практичних навичок при розв'язанні задач за темами: кола постійного струму, кола змінного струму, коливальні контури, довгі лінії, чотириполюсники та схемні функції, перехідні процеси у простих колах.

Збірник задач буде корисний студентам та викладачам, що мають на меті навчитися розв'язувати практичні задачі за данню тематикою.

© А.В. Булашенко, М.І. Ястребов, 2020  
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

## Зміст

Вступ .....	5
1. ПОСТІЙНИЙ СТРУМ .....	5
1.1. Короткі теоретичні відомості.....	5
1.2. Задачі для самостійного розв'язання .....	13
1.2.1. Закон Ома та закони Кірхгофа.....	13
1.2.2. Дільники струму та напруги, метод пропорційних величин .....	14
1.2.3. Потужність. Баланс потужностей. Закони Кірхгофа.....	15
1.2.4. Еквівалентні перетворення джерел .....	18
1.2.5. Методи контурних струмів та вузлових напруг.....	21
1.2.6. Принципи суперпозиції та взаємності .....	22
1.2.7. Керовані джерела .....	23
1.2.8. Метод еквівалентного генератора .....	26
1.2.9. Олімпіадні задачі.....	31
2. ЗМІННИЙ СТРУМ .....	35
2.1 Короткі теоретичні відомості.....	35
2.1.1. Поняття про змінний струм .....	35
2.1.2. Поняття про гармонічний струм.....	35
2.1.3. Поняття про кола із магнітними зв'язками .....	42
2.2 Задачі для самостійного розв'язання .....	44
2.2.1. Періодичний негармонічний струм.....	44
2.2.2. Гармонічний струм та напруга .....	46
2.2.3. Закон Ома, еквівалентні перетворення пасивних елементів .....	47
2.2.4. Визначення елементів кола .....	49
2.2.5. Потужність та добротність гілки.....	51
2.2.6. Паралельна та послідовна схеми заміщення .....	52
2.2.7. Метод еквівалентного генератора .....	53
2.2.8. Складні кола .....	55
2.2.9. Кола із взаємодукцією .....	57
2.2.10. Олімпіадні задачі.....	58
3. КОЛИВАЛЬНІ КОНТУРИ.....	61
3.1 Короткі теоретичні відомості.....	61
3.2 Задачі для самостійного розв'язання .....	64
3.2.1. Послідовний контур.....	64
3.2.2. Паралельний контур .....	68
3.2.3. Конттури із магнітними зв'язками.....	72
3.2.4. Олімпіадні задачі.....	74
4. СХЕМНІ ФУНКЦІЇ ТА ПРОХІДНІ ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ.....	77
4.1. Короткі теоретичні відомості.....	77
4.1.1. Поняття про схемні функції.....	77
4.1.2. Поняття про чотириполіусники .....	79
4.2. Задачі для самостійного розв'язання .....	82
4.2.1. Схемні функції простих кіл.....	82
4.2.2. Прості чотириполіусники.....	84
4.2.3. Олімпіадні задачі.....	87
5. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ У ПРОСТИХ КОЛАХ.....	90
5.1. Короткі теоретичні відомості.....	90
5.2. Задачі для самостійного розв'язання .....	96

5.2.1. Операторний метод у простих колах .....	96
5.2.2. Часові характеристики, вихідні струми та напруги.....	97
5.2.3. Перехідні процеси.....	100
5.2.4. Олімпіадні задачі.....	102
6. ДОВГІ ЛІНІЇ .....	104
6.1. Короткі теоретичні відомості.....	104
6.2. Задачі для самостійного розв'язання .....	112
6.2.1. Лінії із втратами .....	112
6.2.2. Прості розподіли у довгій лінії без втрат .....	113
6.2.3. Чвертьхвильові лінії .....	115
6.2.4. Складні розподіли .....	117
6.2.5. Узгодження лінії з навантаженням .....	118
6.2.6. Перехідні процеси у довгих лініях .....	119
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	121
ДОДАТОК А.....	123
ДОДАТОК Б .....	124
ДОДАТОК В.....	125
ДОДАТОК Г .....	126
ДОДАТОК Д.....	127
ДОДАТОК Ж.....	128

## Вступ

Збірник задач містить умови задач для розв'язання на практичних заняттях кредитного модуля «Основи теорії кіл» і має на меті одержання практичних навичок при розв'язанні задач при розрахунку кіл постійних, змінних, резонансних та перехідних режимах із зосередженими та розподіленими параметрами.

Збірник задач розрахований на курс і складений на основі навчальної програми дисципліни «Основи теорії кіл».

Збірник задач є структурованим та містить задачі різного типу складності. Задачі, що позначені \* є олімпіадними, задачі із \*\* взяті із Всеукраїнської олімпіади за напрямом «Радіотехніка», задачі із \*\*\* взяті із відкритої олімпіади із теорії кіл, що проводиться факультетом електроніки НТУУ «КПІ ім. І.Сікорського».

## 1. ПОСТІЙНИЙ СТРУМ

### 1.1. Короткі теоретичні відомості

Для розрахунків електричних кіл використовують допоміжні одиниці, які наведені у таблиці 1.1.

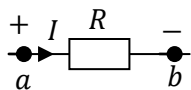
Таблиця 1.1 – Допоміжні величини

Назва	Величина	Назва	Величина
кіло	$10^3$	піко	$10^{-12}$
мега	$10^6$	нано	$10^{-9}$
гіга	$10^9$	мікро	$10^{-6}$
тера	$10^{12}$	мілі	$10^{-3}$

У теорії кіл додатний напрям **струму (current)** позначають стрілкою (рис. 1.1 а)

$$i = \frac{dq}{dt}$$

а)



б)

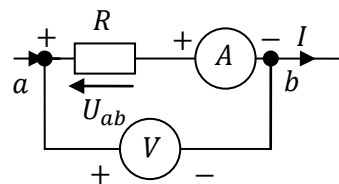


Рисунок 1.1

**Електрична напруга** (рис. 1.1)

$$u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b.$$

**Потужність** елементів кола визначається як

$$p(t) = i(t) \cdot u(t) = i \cdot u,$$

додатному напрямку струму повинен відповідати додатний напрям напруги.

**Енергія** визначається

$$W(t) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt.$$

В еквівалентних схемах джерела електричної енергії умовно поділяють на джерела напруги (рис. 1.2 а) та джерела струму (рис. 1.2 б).

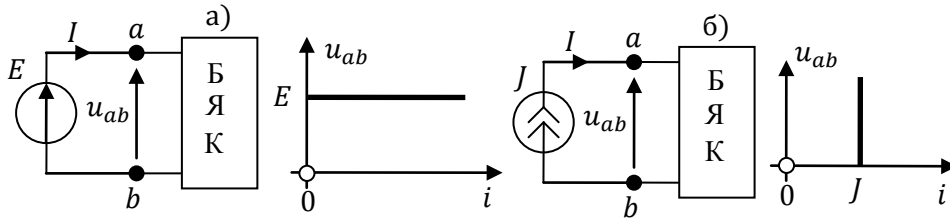


Рисунок 1.2

Внутрішній опір джерела напруги дорівнює нулю:  $r_i = 0$ , а внутрішній опір джерела струму становить  $r_j = \infty$ .

Потужність джерел:  $p_e = e \cdot i$ ;  $p_j = j \cdot u_{ab}$ .

Існує чотири типи керованих джерел:

- джерело напруги, кероване напругою (ДНКН):  $E = \mu \cdot u_{ab}$ , де  $\mu$  – це коефіцієнт пропорційності;
- джерело напруги кероване струмом (ДНКС):  $E = \gamma \cdot i$  де,  $\gamma$  – це коефіцієнт пропорційності;
- джерело струму, кероване напругою (ДСКН):  $J = S \cdot u_{ab}$  де,  $S$  – це коефіцієнт пропорційності (крутість);
- джерело струму, кероване струмом (ДСКС):  $J = \alpha \cdot i$ , де  $\alpha$  – це коефіцієнт пропорційності.

### Основні закони електричних кіл

**Закон Ома** (Ohm's law) для ділянки кола

$$i = \frac{u}{R} = u \cdot g, \quad g = G = \frac{1}{R} = \frac{1}{r}.$$

Величина  $g$  або  $G$  називають **провідністю**, її розмірність Сіменси (Сім).

Формули для розрахунку потужності на опорі

$$p = i \cdot u = i^2 R = \frac{u^2}{R}.$$

### Перший закон Кірхгофа

Алгебраїчна сума струмів у вузлі дорівнює нулю.

$$\sum_{n=1}^m I_n = 0.$$

Причому струми, що втікають до вузла беруться з одним знаком, а ті, що витікають – з іншим.

### Другий закон Кірхгофа

Алгебраїчна сума напруг по контуру обходу будь-якої ділянки кола дорівнює нулю

$$\sum_{n=1}^m U_n = 0.$$

Причому напруги, що спрямовані за годинником стрілкою беруться з одним знаком, а ті, що спрямовані в інший бік – з іншим знаком.

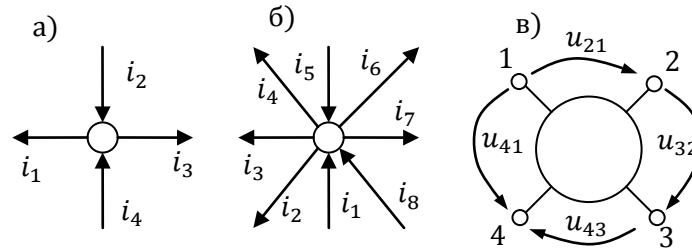


Рисунок 1.3

### Закон балансу потужностей

Алгебраїчна сума потужностей джерел дорівнює алгебраїчній сумі потужностей споживачів

$$\sum P_{\text{ДЖ}} = \sum P_R, \quad \text{де}$$

$$\sum P_{\text{ДЖ}} = \sum P_E + \sum P_J;$$

$$P_E = E \cdot I_E; \quad P_J = U_J \cdot J; \quad P_R = I^2 R = \frac{u^2}{R}.$$

Причому, якщо струм та напруга через джерело спрямовані в один бік (енергія споживається колом), то потужність береться додатною, а якщо в інший бік – від'ємною (енергія відається у коло).

Для **ділянки струму** (рис. 1.4)

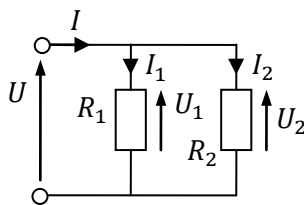


Рисунок 1.4

$$I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Коефіцієнт передачі за струмом – це відношення струму на виході до струму на вході

$$K_{I1} = \frac{I_{\text{ВІХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{I_1}{I} = \frac{R_2}{R_1 + R_2};$$

$$K_{I2} = \frac{I_{\text{ВІХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{I_2}{I} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Для **ділянки напруги** (рис. 1.5)

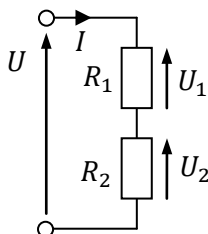


Рисунок 1.5

$$U_1 = \frac{UR_1}{R_1 + R_2}; \quad U_2 = \frac{UR_2}{R_1 + R_2}.$$

Коефіцієнт передачі за напругою – це відношення напруги на виході до напруги на вході

$$K_{U1} = \frac{U_{\text{ВІХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2};$$

$$K_{U2} = \frac{U_{\text{ВІХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

### Еквівалентні перетворення

Для послідовного з'єднання активних та резистивних елементів (рис. 1.6 а) схему можна спростити (рис. 1.6 б) та записати еквівалентні параметри:

$$R_E = R_1 + \dots + R_n,$$

$$E_E = E_1 - \dots - E_p.$$

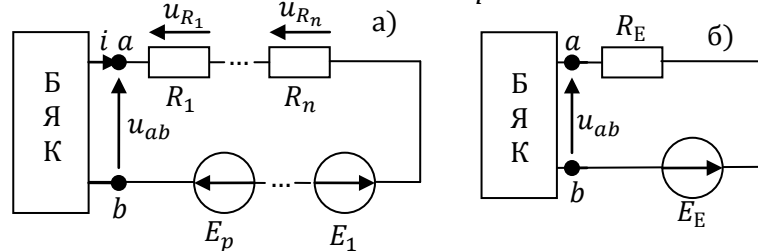


Рисунок 1.6

Для паралельного з'єднання активних та резистивних елементів (рис. 1.7 а) схему можна спростити (рис. 1.7 б)

$$g_E = g_1 + \dots + g_n,$$

$$J_E = J_1 + \dots - J_p.$$

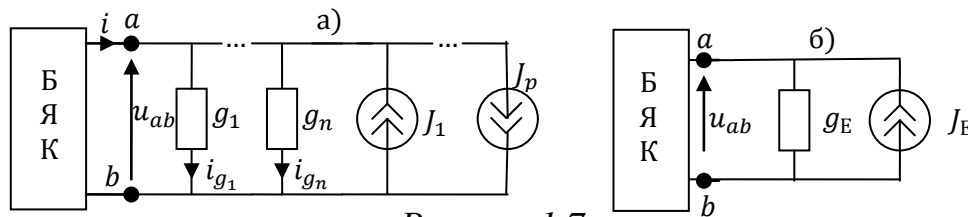


Рисунок 1.7

Опори з'єднані зіркою визначаються через опори трикутника:

$$R_1 = \frac{R_{31} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Опори з'єднані трикутником через опори, з'єднані зіркою:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}, \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1},$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}.$$

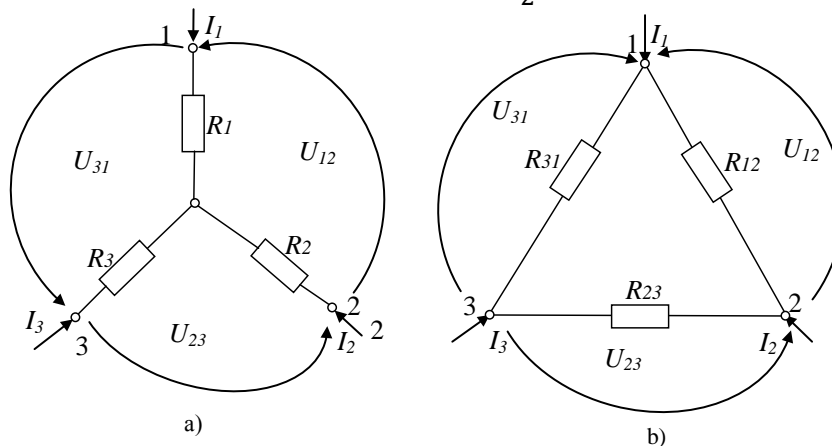
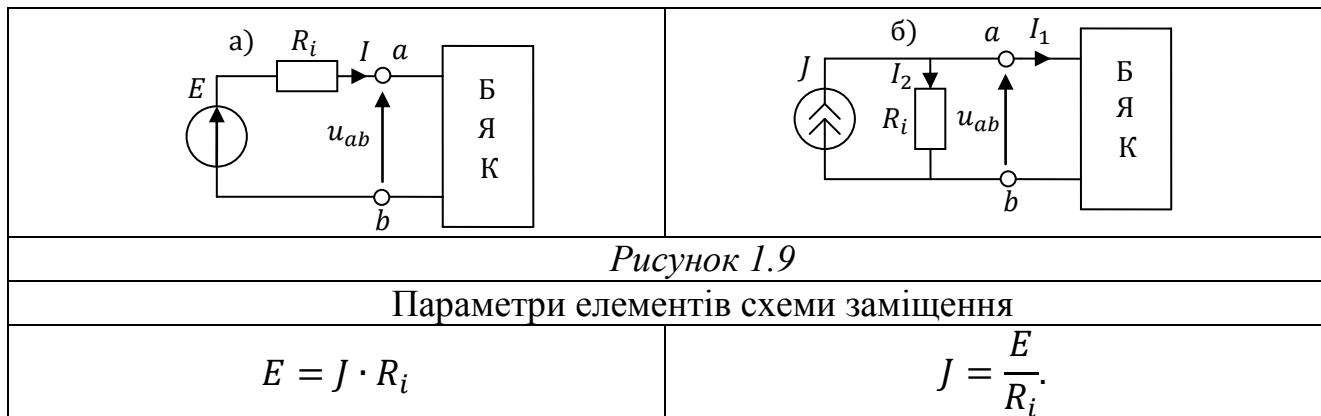


Рисунок 1.8



Перетворення джерела струму у джерело напруги (рис. 1.9).



Винесення джерела напруги за вузол (рис. 1.10).

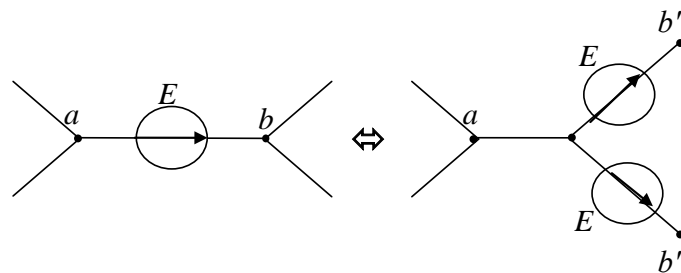


Рисунок 1.10

Перенесення джерела струму до контура (рис. 1.11).

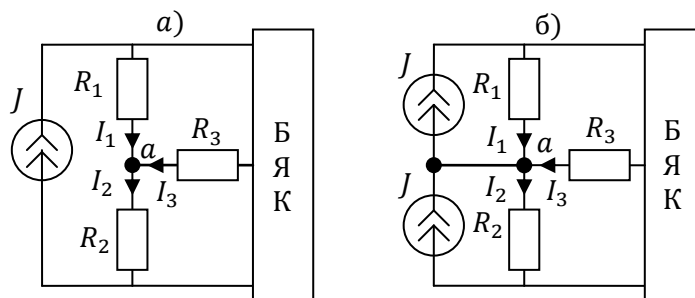


Рисунок 1.11

До основних методів розрахунку електричних кіл відносять: метод контурних струмів (МКС) та метод вузлових напруг (МВН).

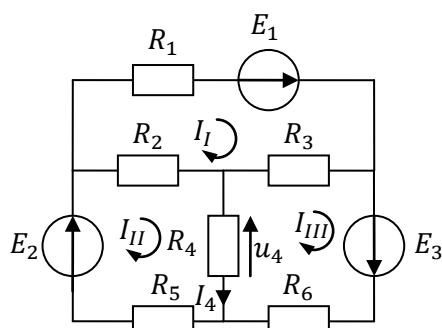


Рисунок 1.12

**МКС** полягає у тому, що замість струмів у гілках визначаються контурні струми, що проходять у контурах (рис. 1.12)

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3)I_I - R_2I_{II} - R_3I_{III} = E_1; \\ -R_2I_I + (R_2 + R_4 + R_5)I_{II} - R_4I_{III} = E_2; \\ -R_3I_I - R_4I_{II} + (R_3 + R_4 + R_6)I_{III} = E_3. \end{cases}$$

Якщо у колі є кероване джерело, наприклад  $E_3 = \mu \cdot u_4$ , то його необхідно виразити через контурні струми

$$E_3 = \mu \cdot I_4 R_4 = \mu \cdot (I_{II} - I_{III}) R_4.$$

Джерело  $E_3$  необхідно перенести із правої частини рівняння у ліву частину, тоді третє рівняння набуде вигляду

$$-R_3 I_I - (R_4 + \mu R_4) I_{II} + (R_3 + R_4 + R_6 + \mu R_4) I_{III} = 0.$$

При використанні матричної форми запису системи рівнянь вираз напруги  $E_3$ , записується у третій рядок, а оскільки керується струмами  $I_{II}$  та  $I_{III}$ , то записується відповідно у другий та третій стовпчик. Якщо у колі є інший вид керованого джерела, то його необхідно виразити через контурні струми.

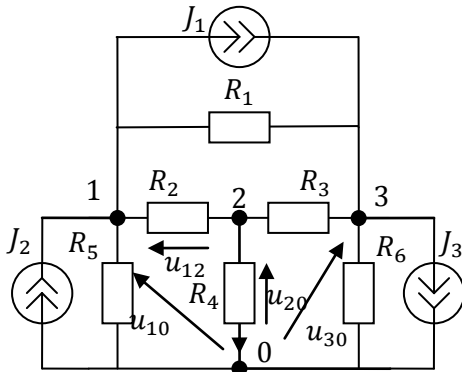


Рисунок 1.13

**МВН** полягає у тому, що визначаються напруги у вузлах кола відносно базисного вузла за першим законом Кірхгофа.

$$\begin{cases} (g_1 + g_2 + g_5)u_{10} - g_2 u_{20} - g_1 u_{30} = J_2 - J_1; \\ -g_2 u_{10} + (g_2 + g_3 + g_4)u_{20} - g_3 u_{30} = 0; \\ -g_1 u_{10} - g_3 u_{20} + (g_1 + g_3 + g_6)u_{30} = J_1 - J_3. \end{cases}$$

Спочатку краще всі джерела напруги перетворити на джерела струму (рис. 1.13).

Якщо у колі є кероване джерело, наприклад  $J_3 = S \cdot u_{12}$ , то його необхідно виразити через вузлові напруги  $J_3 = S \cdot (u_{10} - u_{20})$ .

Джерело  $J_3$  необхідно перенести із правої частини рівняння у ліву частину, третє рівняння набуде вигляду

$$-(g_1 + S)u_{10} - (g_3 - S)u_{20} + (g_1 + g_3 + g_6)u_{30} = J_1.$$

При використанні матричної форми запису системи рівнянь вираз струму  $J_3$  записується у третій рядок, а оскільки керується напругами  $u_{10}$  та  $u_{20}$ , то записується відповідно у перший та другий стовпчик з відповідним знаком.

**Схемна функція** – це відношення реакції до дії (рис. 1.14).



Рисунок 1.14

До схемних функцій відносять: коефіцієнти передачі за струмом та напругою, вхідний опір та провідність, передавальні опір та провідність.

За матрицею опорів, що складена за МКС, та матрицею провідностей, що складена за МВН, можна визначити схемні функції:

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
Коефіцієнт передачі за струмом	
$K_i = \frac{I_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}$	$K_i = \frac{I_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Y_H$
Коефіцієнт передачі за напругою	
$K_u = \frac{U_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Z_H$	$K_u = \frac{U_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}$
Вхідний опір	
$Z_{BX} = \frac{U_{BX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta}{\Delta_{aa}}$	$Z_{BX} = \frac{U_{BX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta}$

**Принцип суперпозиції:**

Реакція (струм чи напруга) лінійного кола на дію у вигляді кількох джерел дорівнює алгебраїчній сумі реакцій (часткових струмів чи напруг) на кожне джерело окремо.

При розрахунку струмів або напруг у гілках кола роблять наступне: по черзі розраховують струми або напруги, що виникають від дії кожної джерела напруги, замінюючи інші джерела їх внутрішніми опорами. Струм або напруги у гілках знаходять як алгебраїчну суму струмів або напруг від кожного джерела окремо.

**Теорема про еквівалентний генератор (the theorem about the equivalent generator):**

Будь-який лінійних активний двополюсник (рис. 1.15 а) можна замінити джерелом напруги  $E_{\text{ЕГ}}$  із внутрішнім опором  $R_{\text{ЕГ}}$  (рис. 1.15 б), величини яких визначаються як:

а) напруга еквівалентного генератора  $E_{\text{ЕГ}} = U_{\text{ХХ}}$  між вузлами  $a$  та  $b$ ,

б) опір еквівалентного генератора  $R_{\text{ЕГ}} = U_{\text{ХХ}}/I_{\text{КЗ}}$ .

Опір  $R_{\text{ЕГ}}$  можна розрахувати за схемою, якщо відома її конфігурація. Величина цього опору визначається входним опором двополюсника, якщо всі джерела замінити їх внутрішніми опорами при розімкненій гілці  $ab$ .

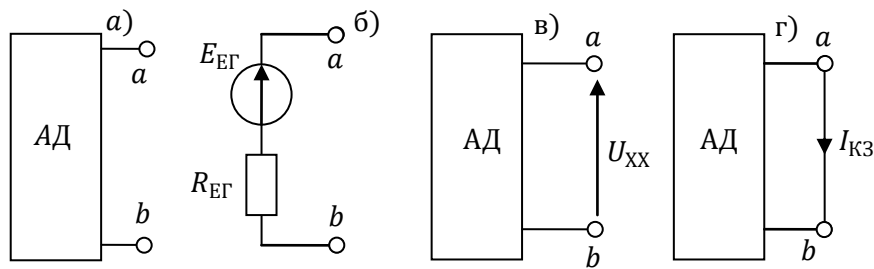


Рисунок 1.15

Умова передачі максимальної потужності у навантаження

$$P_{\text{max}} = \frac{E^2}{4r_{\text{H}}}, \quad r_{\text{Г}} = r_{\text{H}}, \quad \text{коли } r_{\text{H}} = \text{var};$$

$$P_{\text{max}} = \frac{E^2}{r_{\text{H}}}, \quad X_{\text{H}} = X_{\text{Г}}, \quad r_{\text{Г}} = 0 \quad \text{зколи } r_{\text{Г}} = \text{var}.$$

**Принцип взаємності:**

Якщо у  $k$ -му контурі деякого пасивного кола ввімкнене джерело  $E_k$ , що викликає у  $m$ -му контурі струм  $I_m$  (рис. 1.16 а), то теж джерело, перенесене у  $m$ -й контур викличе у  $k$ -му контурі струм тієї же величини та фази (рис. 1.16 б)

$$\frac{I_m}{I_k} = \frac{E_k}{E_m}.$$

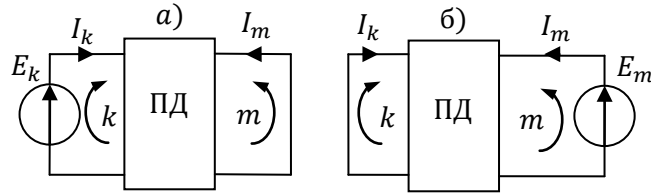


Рисунок 1.16

Аналогічно і для джерела струму

$$\frac{u_{km}}{u_{ab}} = \frac{J_k}{J_m},$$

при  $\Delta_{km} = \Delta_{mk}$  для матриці провідностей по МВН.

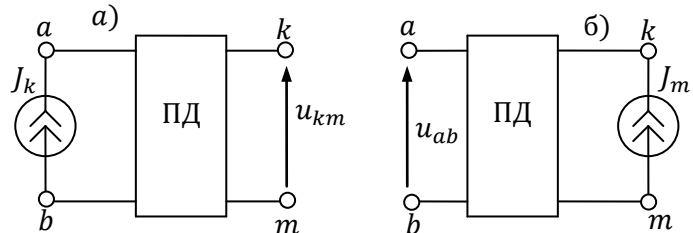


Рисунок 1.17

### Теорема компенсації:

Струми у колі не зміняться, якщо будь-який пасивний елемент на деякій ділянці замінити джерелом  $E_E = u_{ab} = RI$ , що дорівнює за величиною напрузі на даній ділянці кола та спрямоване назустріч струму, що проходить по цій ділянці (рис. 1.18).

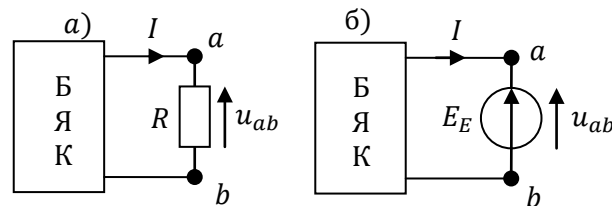


Рисунок 1.18

Аналогічно його можна замінити і джерелом струму (рис. 1.19)

$$J_E = I = gu_{ab}.$$

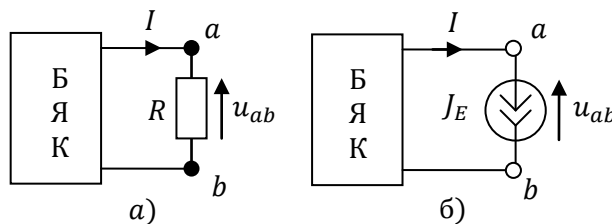


Рисунок 1.19

## 1.2. Задачі для самостійного розв'язання

### 1.2.1. Закон Ома та закони Кірхгофа

**Задача 1.1.** Дано: а) струми  $i_1(t)$  та  $i_3(t)$  у вузлі (рис. 1.17 а), знайти та побудувати струм  $i_2(t)$ ; б) напруги  $u_{23}(t)$  та  $u_{13}(t)$  у колі (рис. 1.17 б). Знайти та побудувати напругу  $u_{21}(t)$ .

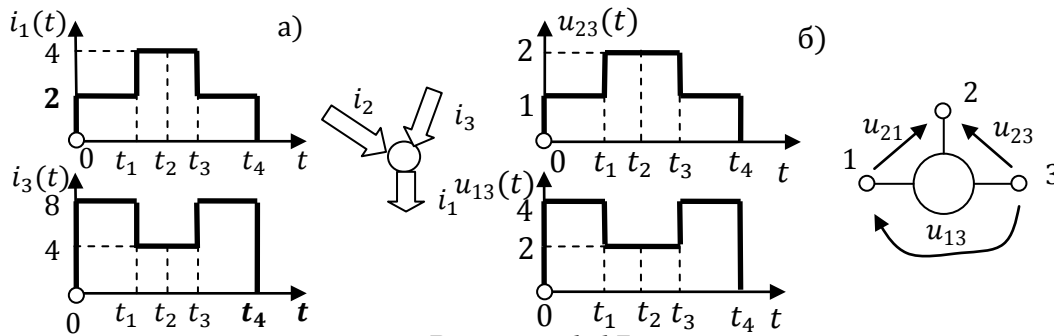


Рисунок 1.17

**Задача 1.2.** У колі (рис. 1.18) визначити показання амперметра (ідеального) з урахуванням полярності ввімкнення. Числові значення елементів наведені на схемі: опори – кОм, напруга – В

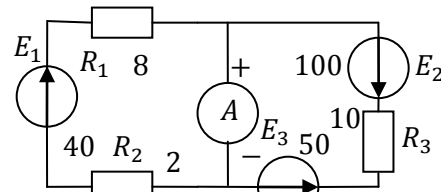


Рисунок 1.18

Відповідь:  $-1\text{mA}$ .

**Задача 1.3.** У колі (рис. 1.19) визначити при якому співвідношенні  $R_1, R_2, R_3, R_4$  напруга  $U_{ab}$  буде дорівнювати нулю. Навести виведення цього співвідношення. Виведення повинне бути повним.

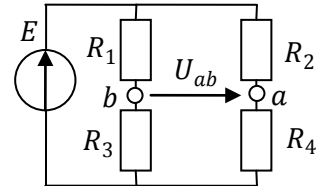


Рисунок 1.19

Відповідь:  $R_1 R_4 = R_2 R_3$ .

**Задача 1.4.** У колі (рис. 1.20) визначити струми  $I_1, I_2, I_3$ . Як зміняться ці струми, якщо змінити напрями всіх джерел струму? Числові значення елементів наведені на схемі: струм в мА, напруга в В, опори в кОм.

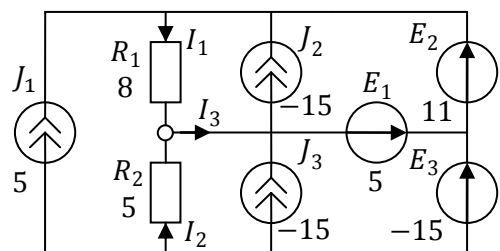


Рисунок 1.20

Відповідь:  $I_1 = 2\text{mA}, I_2 = 4\text{mA}, I_3 = 6\text{mA}$ .

### 1.2.2. Дільники струму та напруги, метод пропорційних величин

**Задача 1.5.** У колах (рис. 1.21) знайти значення всіх опорів. Відомо, що: а) вхідний опір кола  $R_{ВХ} = 100$  кОм, а  $U_2/U = 0.4$ ; б) вхідний опір кола складає  $R_{ВХ} = R_0 = 100$  кОм, а  $U_2/E = 0.5$ ; в) вхідний опір виділеної частини схеми дорівнював би  $R_0$ . Струми в мА, напруга в В.

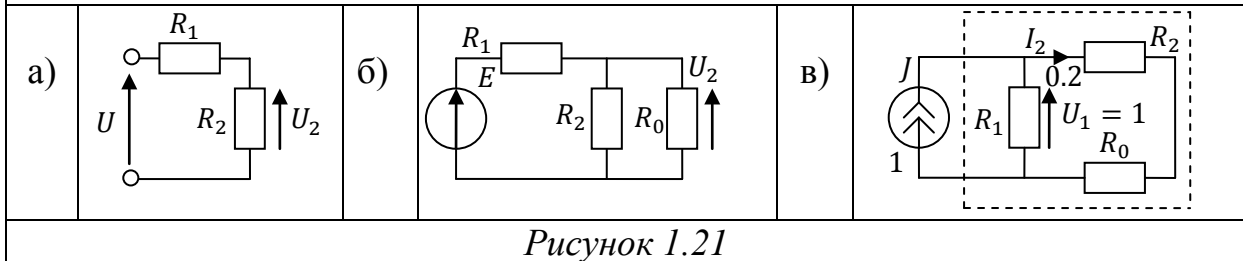


Рисунок 1.21

Відповідь: а)  $R_1 = 60$  кОм,  $R_2 = 40$  кОм; б)  $R_1 = 50$  кОм,  $R_2 = 100$  кОм;  
в)  $R_0 = 1$  кОм,  $R_1 = 1.25$  кОм,  $R_2 = 4$  кОм.

**Задача 1.6.** У колах (рис. 1.22) розрахувати напругу (а, б) та струми (в, г) на всіх елементах із зазначенням напрямку. Визначити еквівалентний опір  $R_E$  відносно точок ввімкнення джерела. Числові значення елементів наведені на схемі: опори – кОм, напруга – В, струм – мА.

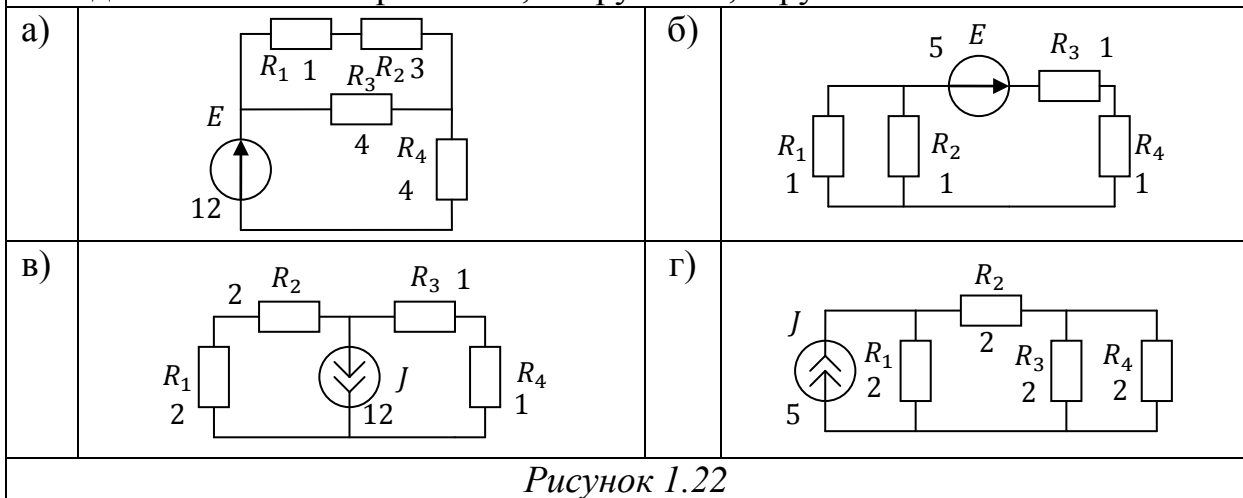


Рисунок 1.22

Відповідь: а)  $u_1 = 1$  В,  $u_2 = 3$  В,  $u_3 = 4$  В,  $u_4 = 8$  В,  $R_E = 6$  кОм;  
б)  $u_1 = 1$  В,  $u_2 = 1$  В,  $u_3 = 2$  В,  $u_4 = 2$  В,  $R_E = 2.5$  кОм;  
в)  $I_1 = 4$  мА,  $I_2 = 4$  мА,  $I_3 = 8$  мА,  $I_4 = 8$  мА,  $R_E = 4/3$  кОм;  
г)  $I_1 = 3$  мА,  $I_2 = 2$  мА,  $I_3 = 1$  мА,  $I_4 = 1$  мА,  $R_E = 1.2$  кОм.

**Задача 1.7.** У колах (рис. 1.23) визначити вхідну напругу  $E$  та споживану потужність кола. Відомо, що: а) напруга  $U_3 = 10$  В; б) струм  $I_3 = 2$  мА. Числові значення елементів подані на схемі: опори в кОм.

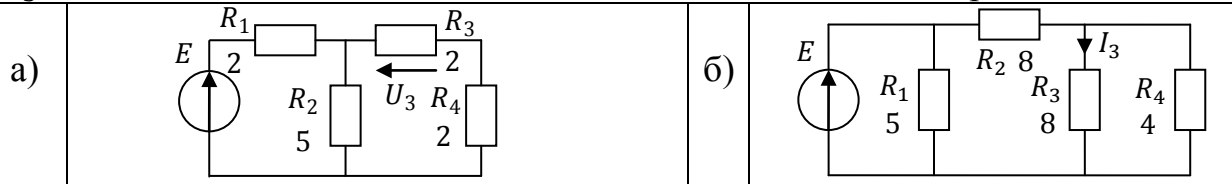


Рисунок 1.23

Відповідь: а)  $E = 38$  В,  $P_{\text{СП}} = 342$  мВт; б)  $E = 64$  В,  $P_{\text{СП}} = 1.408$  Вт.

**Задача 1.8.** У колі (рис. 1.24) визначити напругу  $U_5$  методом пропорційних величин та законів Кірхгофа. Числові значення елементів подані на схемі: опір у кОм, напруга у В, струм у мА.

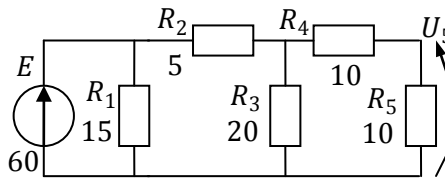


Рисунок 1.24

Відповідь:  $u_5 = 20$  В.

### 1.2.3. Потужність. Баланс потужностей. Закони Кірхгофа

**Задача 1.9.** У колі (рис. 1.25) визначити потужність кожного із джерел та їх режими роботи (віддає або споживає енергію). Числові значення елементів наведені на схемі: струм – мА, напруга – В.

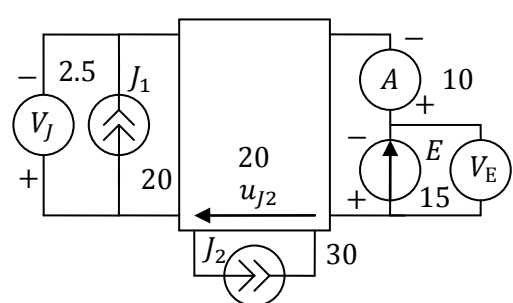


Рисунок 1.25

Відповідь:  $P_{J1} = -600$  мВт,  $P_{J2} = -50$  мВт,  $P_E = 150$  мВт.

**Задача 1.10.** У колах (рис. 1.26) підібрати таке значення джерела  $E$  (рис. 1.26 а) або джерела  $J$  (рис. 1.26 б), щоб джерело не споживало та не віддавало потужність, причому  $E, J \neq 0$ . Числові значення елементів наведені на схемі: опори – кОм, напруга – В, струм – мА.

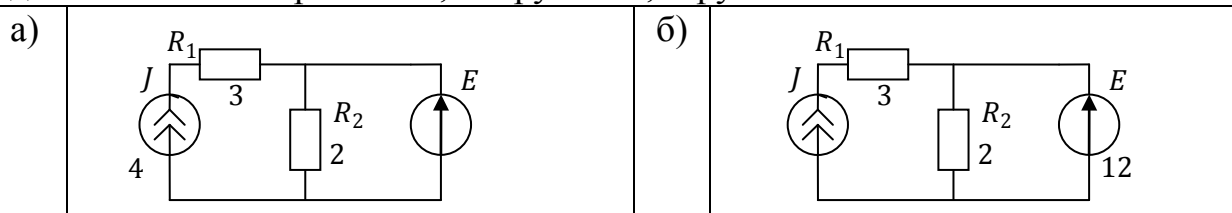


Рисунок 1.26

Відповідь: а)  $E = 8$  В; б)  $J = 4$  мА.

**Задача 1.11.** У колах (рис. 1.27) знайти всі струми та напруги використовуючи закони Ома та Кірхгофа. Перевірити виконання балансу потужностей. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В. Зробити висновок про режими роботи кожного із джерел.

а)		б)	
в)		г)	
д)		ж)	
з)		к)	
л)		м)	
н)		о)	
п)		р)	

Рисунок 1.27

Відповідь: а)  $I_2 = 15$  мА,  $I_E = 5$  мА,  $u_J = 40$  В,  $u_1 = 10$  В,  $P = 550$  мВт;



- б)  $I_R = 6 \text{ мА}$ ,  $u_{J1} = 0$ ,  $u_{J2} = 12 \text{ В}$ ,  $u_R = 12 \text{ В}$ ,  $P = 72 \text{ мВт}$ ;  
 в)  $I_R = 1 \text{ мА}$ ,  $I_E = 2 \text{ мА}$ ,  $U_R = 2 \text{ В}$ ,  $U_J = 2 \text{ В}$ ,  $P = 2 \text{ мВт}$ ;  
 г)  $I_2 = 5 \text{ мА}$ ,  $u_1 = 4 \text{ В}$ ,  $u_2 = 5 \text{ В}$ ,  $u_{J1} = 11 \text{ В}$ ,  $u_{J2} = 7 \text{ В}$ ,  $P = 33 \text{ мВт}$ ;  
 д)  $I_E = 7 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 1 \text{ мА}$ ,  $u_1 = 12 \text{ В}$ ,  $u_2 = 2 \text{ В}$ ,  $u_J = 10 \text{ В}$ ,  $P = 74 \text{ мВт}$ ;  
 ж)  $I_E = 3 \text{ мА}$ ,  $u_J = 8 \text{ В}$ ,  $u_R = 6 \text{ В}$ ,  $P = 18 \text{ мВт}$ ;  
 з)  $I_R = 1 \text{ мА}$ ,  $u_J = 2 \text{ В}$ ,  $u_R = 4 \text{ В}$ ,  $P = 4 \text{ мВт}$ ;  
 к)  $I_1 = 15 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 4 \text{ мА}$ ,  $I_{E1} = 5 \text{ мА}$ ,  $I_{E2} = 9 \text{ мА}$ ,  $P = 530 \text{ мВт}$ ;  
 л)  $I_{E2} = 3 \text{ мА}$ ,  $I_R = 1 \text{ мА}$ ,  $u_J = 4 \text{ В}$ ,  $P = 2 \text{ мВт}$ ;  
 м)  $I_E = 1 \text{ мА}$ ,  $I_R = 4 \text{ мА}$ ,  $u_R = 8 \text{ В}$ ,  $P = 32 \text{ мВт}$ ;  
 н)  $I_{E1} = 5 \text{ мА}$ ,  $I_R = 3 \text{ мА}$ ,  $u_R = 6 \text{ В}$ ,  $P = 18 \text{ мВт}$ ;  
 о)  $I_E = 3 \text{ мА}$ ,  $u_R = 12 \text{ В}$ ,  $u_{J2} = 10 \text{ В}$ ,  $P = 72 \text{ мВт}$ ;  
 п)  $I_E = 6 \text{ мА}$ ,  $I_R = 3 \text{ мА}$ ,  $u_R = 6 \text{ В}$ ,  $P = 18 \text{ мВт}$ ;  
 р)  $I_E = 2 \text{ мА}$ ,  $u_R = 4 \text{ В}$ ,  $u_{J2} = 6 \text{ В}$ ,  $P = 8 \text{ мВт}$ .

**Задача 1.12\***. У колі (рис. 1.28) визначити значення елементів:  $R_3$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ . Числові значення елементів:  $R_2 = R_3$ ,  $P_1 = 36 \text{ мВт}$ ,  $P_2 = 2 \text{ мВт}$ ,  $P_3 = 50 \text{ мВт}$ .

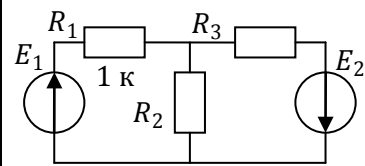


Рисунок 1.28

Відповідь:  $R_3 = 2 \text{ кОм}$ ,  $E_1 = 8 \text{ В}$ ,  $E_2 = 8 \text{ В}$ .

**Задача 1.13\***. У колі (рис. 1.29) знайти  $R_1$ ,  $R_3$ . Числові значення елементів кола:  $R_2 = 1 \text{ кОм}$ ,  $P_2 = 1 \text{ мВт}$ ,  $P_1 + P_3 = 17 \text{ мВт}$ , струми в мА.

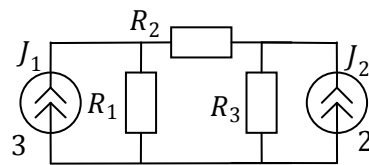


Рисунок 1.29

Відповідь:  $R_1 = 2 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = 1 \text{ кОм}$ ;  $R_1 = 0.8 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = 4.2 \text{ кОм}$ .

**Задача 1.14\***. У колі (рис. 1.30) знайти  $R_1$ ,  $R_2$ . Числові значення потужностей кола:  $P_3 = 16 \text{ мВт}$ ,  $P_1 + P_2 = 24 \text{ мВт}$ . Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

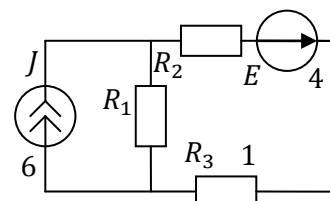


Рисунок 1.30

Відповідь:  $R_1 = 2 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 1 \text{ кОм}$ .

### 1.2.4. Еквівалентні перетворення джерел

**Задача 1.15.** У колі (рис. 1.31) визначити яку потужність віддає (споживає) джерело напруги  $E_2$ . Числові значення елементів наведені на схемі: опори в Ом, струми в А, напруги в В.

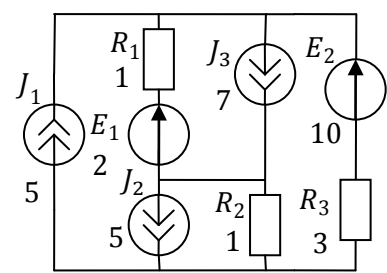


Рисунок 1.31

Відповідь:  $P = 20$  Вт.

**Задача 1.16.** У колі (рис. 1.32) визначити показання амперметра А. Числові значення елементів кола:  $E = 4$  В,  $R_{\text{вТ}} = 1$  кОм,  $R = 2$  кОм. Опір  $R_{\text{вТ}}$  – це внутрішній опір джерела напруги.

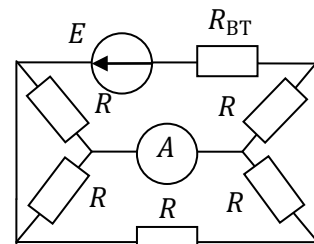


Рисунок 1.32

Відповідь: 1 мА.

**Задача 1.17.** У колах (рис. 1.33) визначити всі струми та напруги на її елементах, використовуючи еквівалентні перетворення джерел. Перевірити виконання балансу потужностей. Значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В. Зробити висновок про режими роботи кожного із джерел.

а)		б)	
в)		г)	
д)		ж)	

Рисунок 1.33, аркуш 1

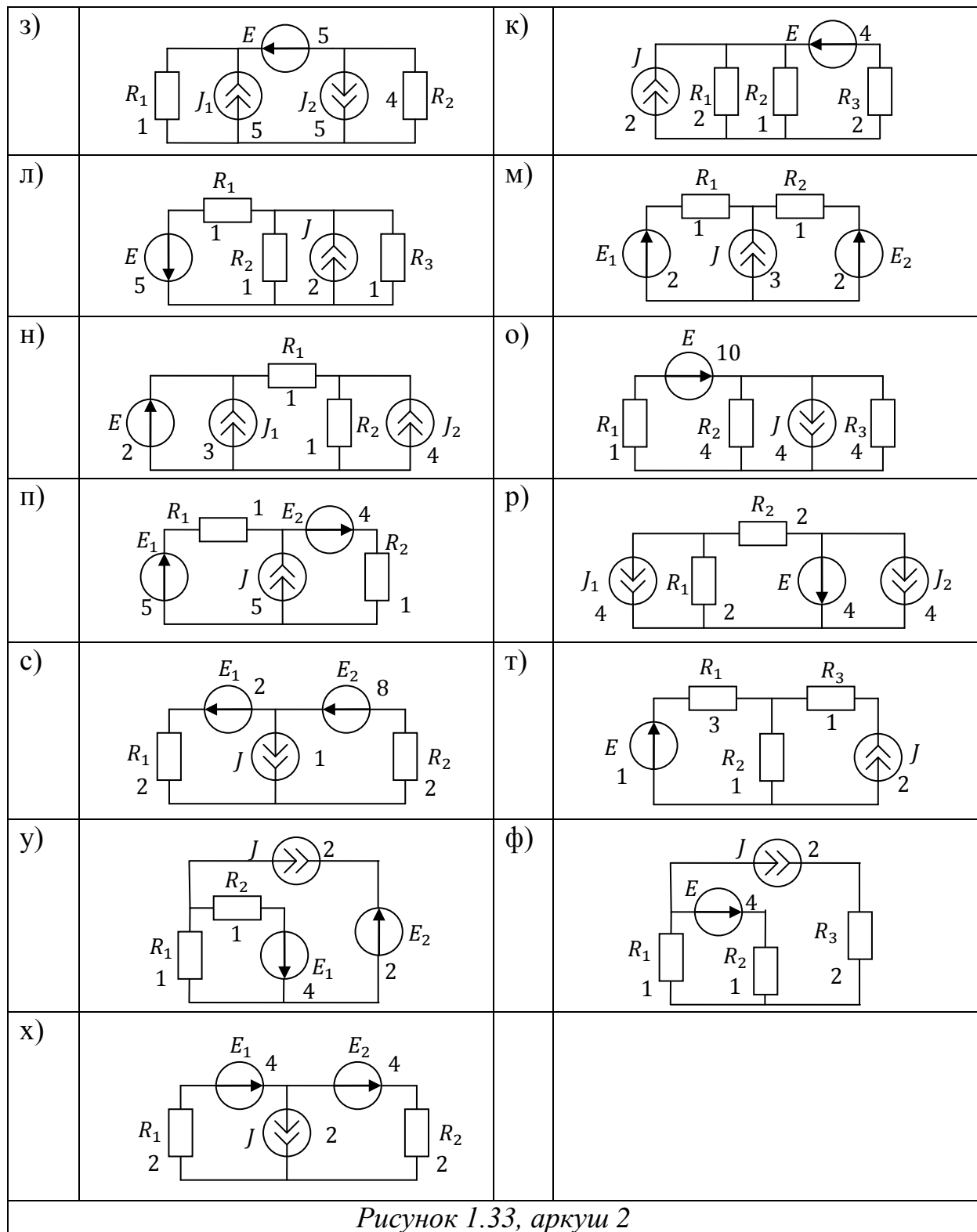


Рисунок 1.33, аркуш 2

Відповідь: а)  $I_1 = 3 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 3 \text{ мА}$ ,  $P = 27 \text{ мВт}$ ,  $U_1 = 3 \text{ В}$ ,  $U_2 = 6 \text{ В}$ ;б)  $I_1 = 10 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 2.5 \text{ мА}$ ,  $I_3 = 7.5 \text{ мА}$ ,  $I_E = 7.5 \text{ мА}$ ,  $P = 225 \text{ мВт}$ ;в)  $I_1 = 1 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 4 \text{ мА}$ ,  $u_1 = 2 \text{ В}$ ,  $u_2 = 12 \text{ В}$ ,  $u_J = 16 \text{ В}$ ,  $P = 50 \text{ мВт}$ ;г)  $I_1 = 4 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 1 \text{ мА}$ ,  $u_1 = 12 \text{ В}$ ,  $u_2 = 2 \text{ В}$ ,  $u_J = 16 \text{ В}$ ,  $P = 50 \text{ мВт}$ ;д)  $I_1 = 2 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 2 \text{ мА}$ ,  $u_1 = 4 \text{ В}$ ,  $u_2 = 6 \text{ В}$ ,  $u_J = 16 \text{ В}$ ,  $P = 20 \text{ мВт}$ ;ж)  $I_E = 1 \text{ мА}$ ,  $I_1 = 1 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 2 \text{ мА}$ ,  $u_1 = 2 \text{ В}$ ,  $u_2 = 4 \text{ В}$ ,  $P = 10 \text{ мВт}$ ;

- з)  $I_E = 4 \text{ мА}$ ,  $I_1 = 1 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 1 \text{ мА}$ ,  $u_1 = 1 \text{ В}$ ,  $u_2 = 4 \text{ В}$ ,  $P = 5 \text{ мВт}$ ;  
 к)  $I_1 = 1 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 2 \text{ мА}$ ,  $I_3 = 1 \text{ мА}$ ,  $u_1 = 2 \text{ В}$ ,  $u_2 = 2 \text{ В}$ ,  $u_3 = 2 \text{ В}$ ,  $P = 8 \text{ мВт}$ ;  
 л)  $I_1 = 4 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 1 \text{ мА}$ ,  $I_3 = 1 \text{ мА}$ ,  $u_1 = 4 \text{ В}$ ,  $u_2 = 1 \text{ В}$ ,  $u_3 = 1 \text{ В}$ ,  $P = 18 \text{ мВт}$ ;  
 м)  $I_1 = 1,5 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 1,5 \text{ мА}$ ,  $u_1 = 5 \text{ В}$ ,  $u_2 = 5 \text{ В}$ ,  $u_j = 3,5 \text{ В}$ ,  $P = 4,5 \text{ мВт}$ ;  
 н)  $I_1 = 1 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 3 \text{ мА}$ ,  $I_E = 4 \text{ мА}$ ,  $u_1 = 1 \text{ В}$ ,  $u_2 = 3 \text{ В}$ ,  $P = 10 \text{ мВт}$ ;  
 о)  $I_1 = 6 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 1 \text{ мА}$ ,  $I_3 = 1 \text{ мА}$ ,  $u_1 = 6 \text{ В}$ ,  $u_2 = 4 \text{ В}$ ,  $P = 44 \text{ мВт}$ ;  
 п)  $I_{E1} = 2 \text{ мА}$ ,  $I_{E2} = 7 \text{ мА}$ ,  $u_j = 3 \text{ В}$ ,  $u_1 = 2 \text{ В}$ ,  $u_2 = 7 \text{ В}$ ,  $P = 53 \text{ мВт}$ ;  
 р)  $I_E = 5 \text{ мА}$ ,  $I_1 = 3 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 1 \text{ мА}$ ,  $u_1 = 6 \text{ В}$ ,  $u_2 = 2 \text{ В}$ ,  $P = 20 \text{ мВт}$ ;  
 с)  $I_1 = 2 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 3 \text{ мА}$ ,  $u_1 = 4 \text{ В}$ ,  $u_2 = 6 \text{ В}$ ,  $u_j = 2 \text{ В}$ ,  $P = 26 \text{ мВт}$ ;  
 т)  $I_E = 1/4 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 7/4 \text{ мА}$ ,  $u_1 = 3/4 \text{ В}$ ,  $u_2 = 7/4 \text{ В}$ ,  $u_3 = 2 \text{ В}$ ,  $P = 7,25 \text{ мВт}$ ;  
 у)  $I_1 = 3 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 1 \text{ мА}$ ,  $u_1 = 3 \text{ В}$ ,  $u_2 = 1 \text{ В}$ ,  $P = 10 \text{ мВт}$ ;  
 ф)  $u_3 = 4 \text{ В}$ ,  $I_1 = 3 \text{ мА}$ ,  $I_2 = 1 \text{ мА}$ ,  $u_1 = 3 \text{ В}$ ,  $u_2 = 3 \text{ В}$ ,  $P = 18 \text{ мВт}$ .

**Задача 1.18\***. У колі (рис. 1.34) знайти значення опора  $R$ . Коло складається із чотирьох однакових опорів  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$  та трьох однакових ідеальних джерел струму  $J_1 = J_2 = J_3 = 2 \text{ мА}$ . Загальна потужність, що споживається всіма опорами становить  $P = 200 \text{ мВт}$ .

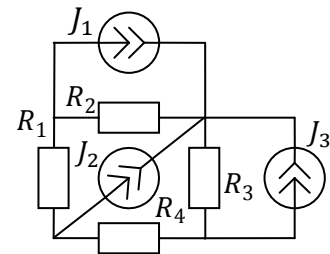


Рисунок 1.34

Відповідь:  $R = 10 \text{ кОм}$ .

**Задача 1.19\*\*** У колі (рис. 1.35) визначити величину джерела напруги  $E$ . Джерело струму  $J$  працює в режимі споживання енергії і споживана ним потужність дорівнює  $P_J = 1 \text{ мВт}$ . Числові значення елементів кола: опори – кОм, струм – мА, напруга – В.

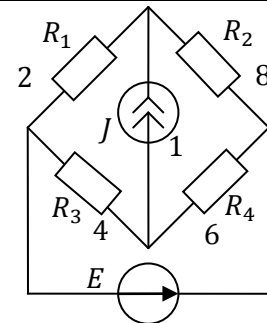
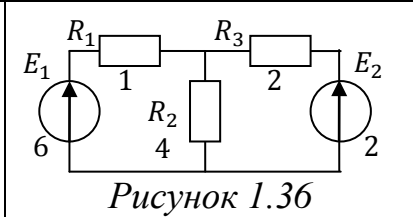


Рисунок 1.35

Відповідь:  $E = 25 \text{ В}$ .

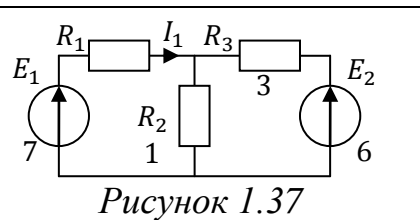
### 1.2.5. Методи контурних струмів та вузлових напруг

**Задача 1.20.** У колі (рис. 1.36) визначити струми у гілках методом контурних струмів. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, напруги в В, струми в мА.



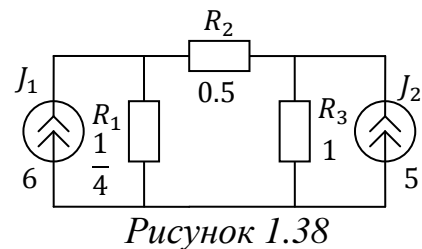
Відповідь:  $I_1 = 2$  мА,  $I_2 = 1$  мА;  $I_3 = 1$  мА.

**Задача 1.21\*\*\*.** У колі (рис. 1.37) визначити величину опору  $R_1$ . Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, напруги в В. Через опір  $R_1$  протікає струм  $I_1 = 2$  мА.



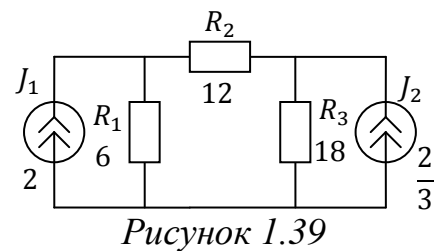
Відповідь:  $R_1 = 2$  кОм.

**Задача 1.22.** У колі (рис. 1.38) методом вузлових напруг визначити струми у гілках кола. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.



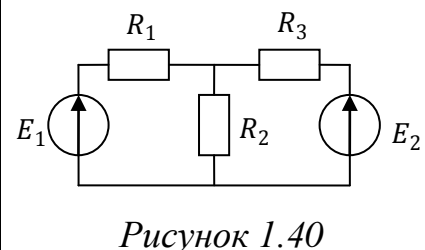
Відповідь:  $I_1 = 2$  мА,  $I_2 = 1$  мА,  $I_3 = 3$  мА.

**Задача 1.23\*\*\*.** У колі (рис. 1.39) визначити величину опору  $R_1$ , щоб при таких же значеннях струмів  $J_1$  та  $J_2$  напруга на ньому збільшилась в 2 рази. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.



Відповідь:  $R_1 = 15$  кОм.

**Задача 1.24\*.** У колії (рис. 1.40) при  $E_1 = 4E_2$  струм через другий опір  $I_2 = 5$  мА. Знайти струм  $I_2$  при збільшенні напруги  $E_2$  у 2 рази, якщо  $R_1 = R_3$  та напруга джерела напруги  $E_1$  при цьому не змінюється.



Відповідь:  $I_2 = 6$  мА.

### 1.2.6. Принципи суперпозиції та взаємності

**Задача 1.25.** У колах (рис. 1.41) принципом суперпозиції (накладання) визначити всі струми. Перевірити баланс потужностей. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струм – мА, напруга – В.

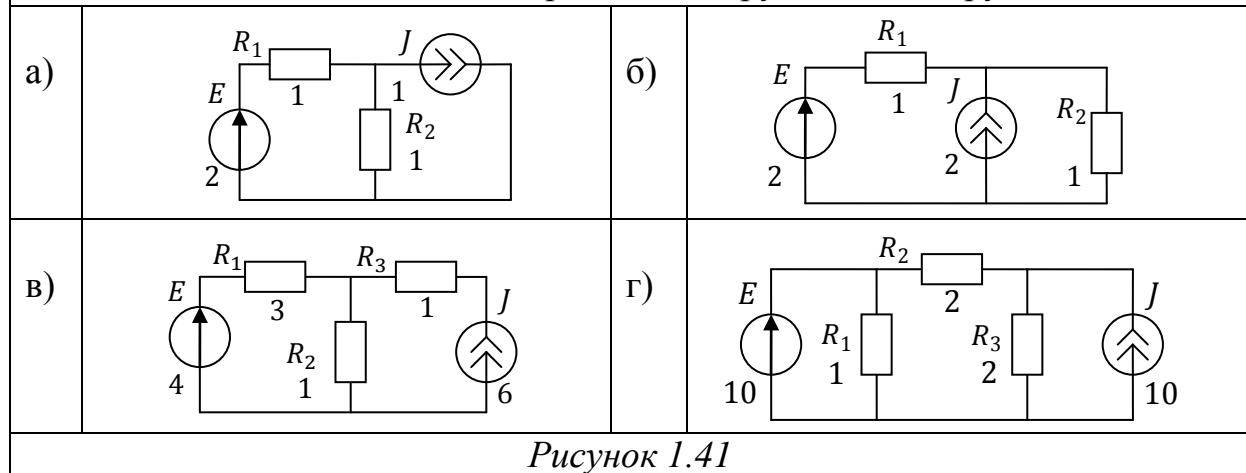


Рисунок 1.41

Відповідь: а)  $I_1 = 1.5$  мА,  $I_2 = 0.5$  мА,  $P = 2.5$  мВт;

б)  $I_1 = 0$ ,  $I_2 = 2$  мА,  $P = 4$  мВт;

в)  $I_1 = 0.5$  мА,  $I_2 = 5.5$  мА,  $P = 67$  мВт;

г)  $I_1 = 10$  мА,  $I_2 = 2.5$  мА,  $I_3 = 7.5$  мА,  $P = 225$  мВт.

**Задача 1.26.** Коло (рис. 1.42) містить лише одне джерело напруги  $E$  і лише одне джерело струму  $J$ . Опір  $R = 2$  кОм. На цьому опорі під дією джерела напруги потужність є  $P_{RE} = 18$  мВт, а під дією джерела струму є  $P_{RJ} = 8$  мВт. Визначити цю потужність, коли джерела діють одночасно.

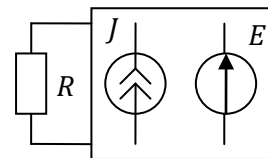


Рисунок 1.42

Відповідь:  $P_{REJ} = 50$  мВт або  $P_{REJ} = 2$  мВт.

**Задача 1.27.** У колі (рис. 1.43) підсхема П не містить джерел. Матриця опорів П для методу контурних струмів цієї схеми симетрична відносно головної діагоналі. У колі (рис. 1.43 а) якщо  $E_1 = 30$  В,  $E_2 = 0$ , то  $I_2 = 34$  мА. Чому буде дорівнювати  $I_1$ , якщо  $E_1 = 0$ ,  $E_2 = 60$  В? У колі (рис. 1.43 б) якщо  $J_1 = 8$  мА,  $J_2 = 0$ , то  $u_2 = 4$  В. Чому буде дорівнювати  $u_1$ , якщо  $J_1 = 0$ ,  $J_2 = 6$  мА?

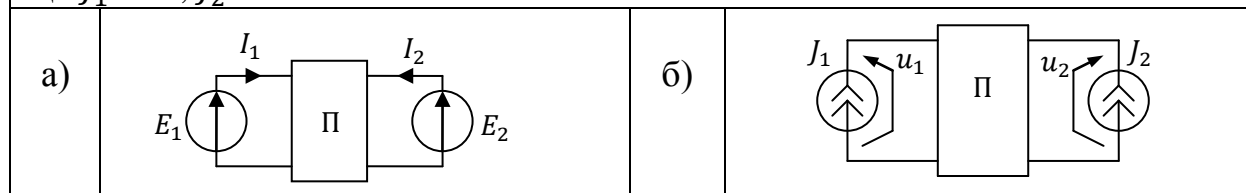


Рисунок 1.43

Відповідь: а)  $I_1 = 68$  мА; б)  $u_1 = 3$  В.

**Задача 1.28.** У колі (рис. 1.44) визначити напругу  $u_{j1}$  під дією двох джерел. Під дією лише одного джерела  $J_1$  напруги на джерелах становлять:  $u_{j1a} = 20$  В,  $u_{j2a} = 12$  В. Струми наведені на схемі в мА.

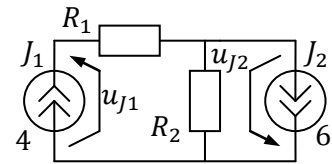


Рисунок 1.44

Відповідь:  $u_{j1} = 2$  В.

**Задача 1.29\*\*.** У колі (рис. 1.45) визначити струм  $I_1$ , що викликаний усіма джерелами. Струми, що викликані джерелом  $E_1$  дорівнюють  $I_{1a} = 1$  мА,  $I_{2a} = 0.4$  мА,  $I_{3a} = 0.6$  мА. Числові значення елементів кола: опори – кОм, струм – мА, напруга – В.

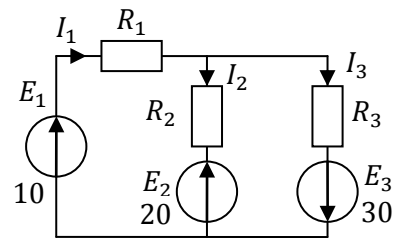


Рисунок 1.45

Відповідь:  $I_1 = 2$  мА.

**Задача 1.30\*.** У колі (рис. 1.46) визначити напругу  $u_1$ , що викликана дією всіх джерел. Напруги на опорах, що викликані дією джерела  $J_1$  дорівнюють  $u_{1a} = 5/3$  В,  $u_{2a} = 2/3$  В,  $u_{3a} = 1$  В. Числові значення елементів кола: опори – кОм, струм – мА, напруга – В.

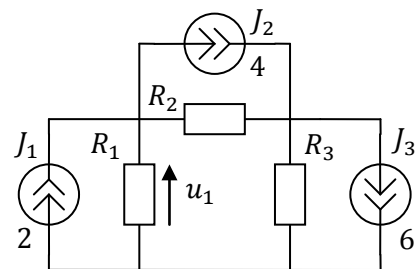


Рисунок 1.46

Відповідь:  $u_1 = 8/3$  В.

### 1.2.7. Керовані джерела

**Задача 1.31.** У колі (рис. 1.47) знайти амплітуду струму у джерелі  $E_2$ . Джерело напруги  $E_2 = mU_{20}$ ,  $m = 4$  є керованим. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

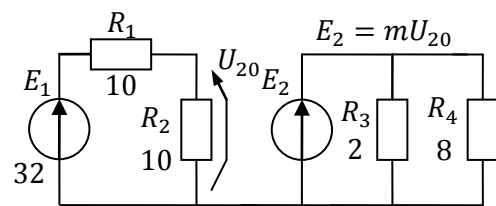


Рисунок 1.47

Відповідь:  $I_E = 40$  мА.

**Задача 1.32.** У колах (рис. 1.48) знайти напругу  $U_{\text{ВІХ}}$ . Джерело: а) напруги  $E_2 = mU_{20}$ ,  $m = 20$  є керованим; б) струму  $J = \mu u_{20}$ , де  $\mu = 2$ ; в) струму  $J_2 = aI_{20}$ ,  $a = 2$  є керованим. Числові значення елементів наведені на схемах: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

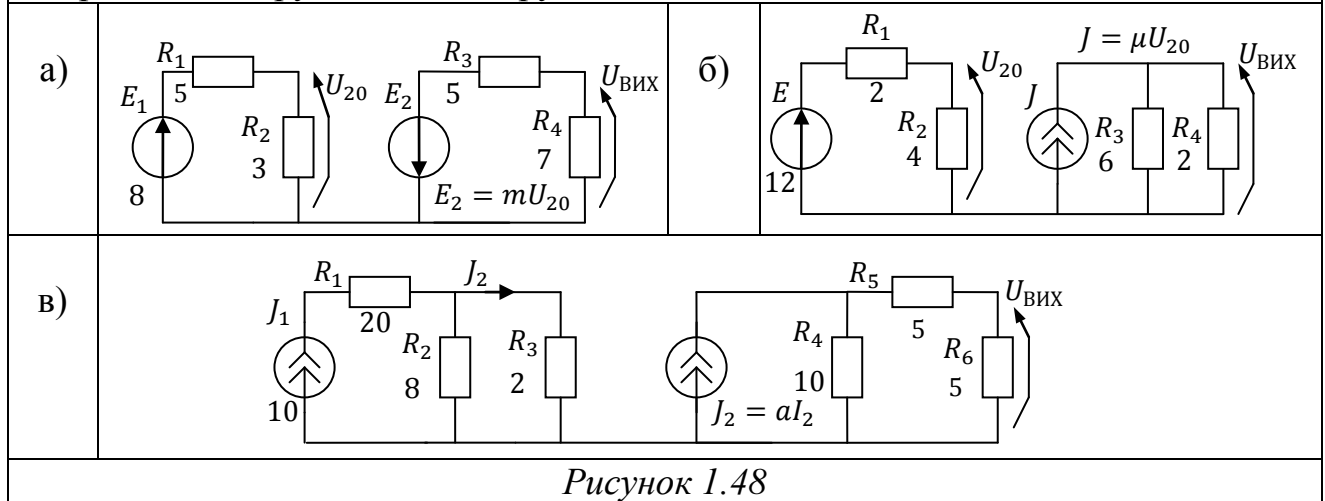


Рисунок 1.48

Відповідь: а)  $u_{\text{ВІХ}} = -35$  В, б)  $u_{\text{ВІХ}} = 24$  В, в)  $u_{\text{ВІХ}} = 40$  В.

**Задача 1.33.** У колі (рис. 1.49) знайти струм  $I$ . Джерела  $E_2 = \mu U_{ab}$ ,  $J_2 = \alpha I$  є керованим. Числові значення елементів наведені на схемі: опори у кОм, струми – мА, напруги – В.

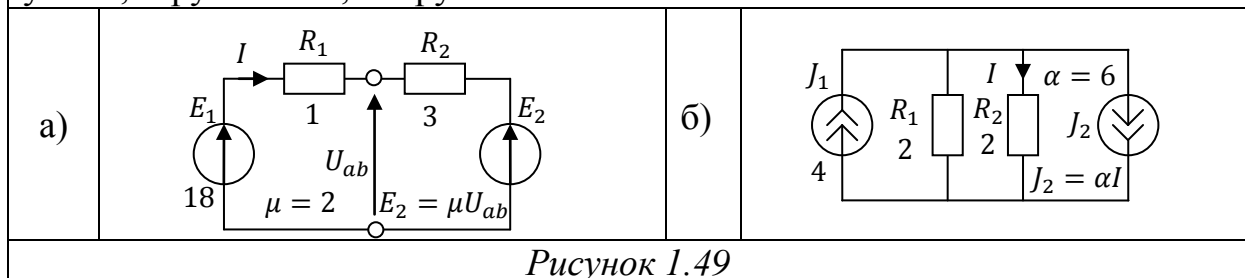


Рисунок 1.49

Відповідь: а)  $I = 3$  мА, б)  $I = -1$  мА.

**Задача 1.34.** Знайти вхідний опір кіл (рис. 1.50), використовуючи тільки еквівалентні перетворення. Джерело: а) напруги  $E = I_1 R_1$  є керованим; б) струму  $J = 10I_1$  є керованим; в) джерело струму  $J = S U_{20}$ , де  $S = 20$  мА/В є керованим. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

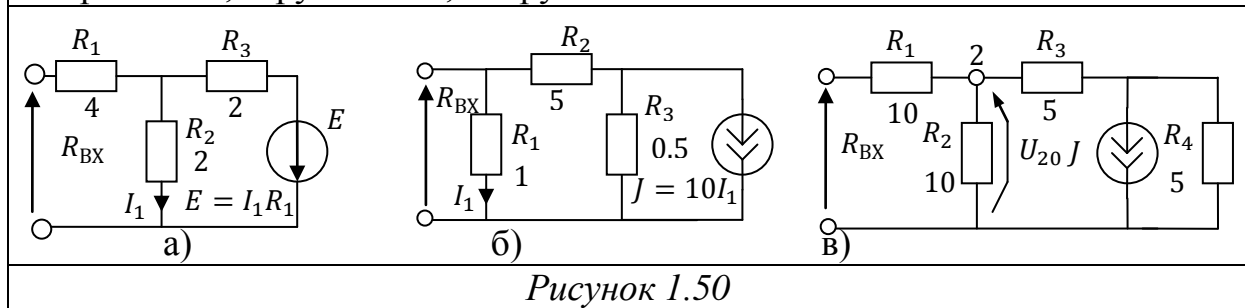


Рисунок 1.50

Відповідь: а)  $R_{\text{ВІХ}} = 4.5$  кОм; б)  $R_{\text{ВІХ}} = 0.48$  кОм; в)  $R_{\text{ВІХ}} = 10$  кОм.



**Задача 1.35.** У колах (рис. 1.51) навести матрицю провідностей та записати у матрицю керовані джерела. Числові значення подані на схемах: опори в кОм, струми – мА, напруги – В,  $S$  – мА/В.

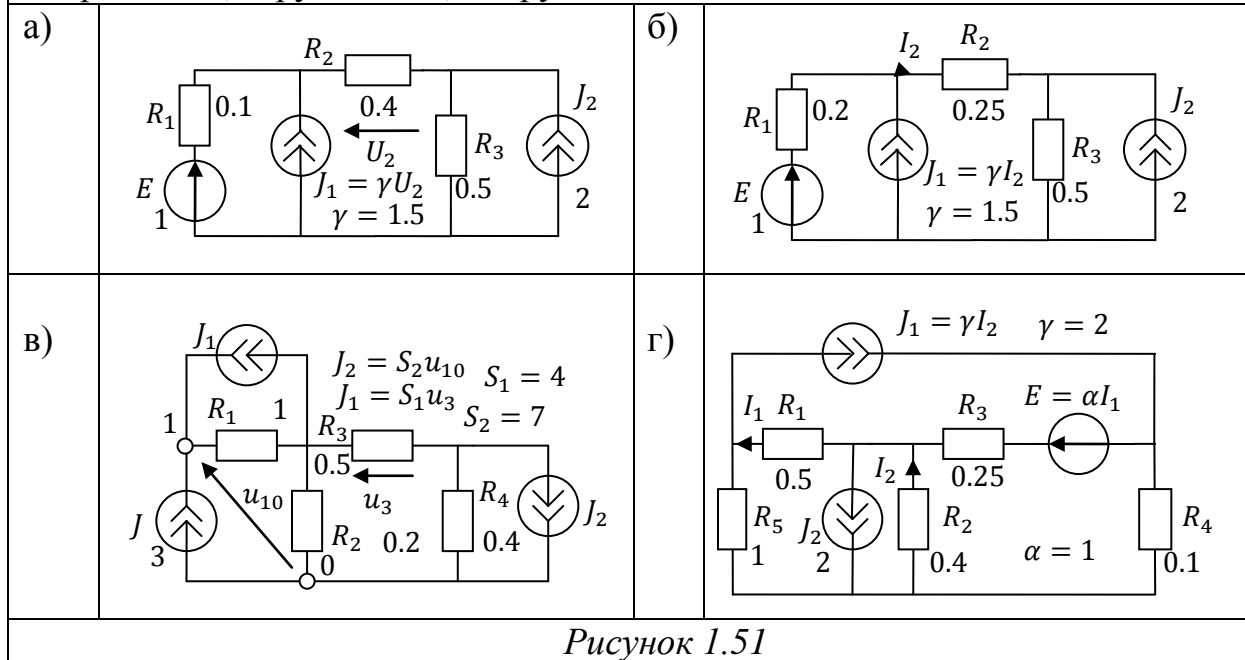


Рисунок 1.51

Відповідь: а)  $G = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ -2,5 & 4,5 \end{bmatrix}$  мСім; б)  $G = \begin{bmatrix} 15 & -10 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$  мСім;

в)  $G = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -1 & 12 & -6 \\ 7 & -2 & 4,5 \end{bmatrix}$  мСім; г)  $G = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 6 & 0,5 & -4 \\ -8 & -1 & 14 \end{bmatrix}$  мСім.

**Задача 1.36.** Для кіл (рис. 1.52) записати матриці опорів (за МКС) та провідностей (за МВН), вписати в них кероване джерело. Джерело напруги  $E_2 = \mu u_2$  є керованим. Додатні напрямки протікання контурних струмів обрати за годинниковою стрілкою. Числові значення подані на схемах: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

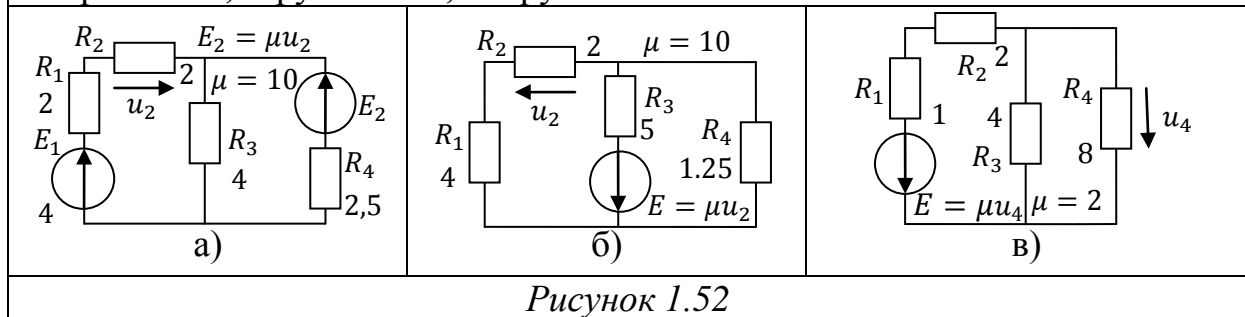


Рисунок 1.52

Відповідь: а)  $R = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -24 & 6,5 \end{bmatrix}$  кОм,  $G = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 3,5 & -2,85 \end{bmatrix}$  мСім;

б)  $R = \begin{bmatrix} -9 & -5 \\ 15 & 6,25 \end{bmatrix}$  кОм,  $G = \begin{bmatrix} 0,75 & -0,5 \\ 1,5 & -0,5 \end{bmatrix}$  мСім;

в)  $R = \begin{bmatrix} 7 & -20 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$  кОм,  $G = \begin{bmatrix} 1,5 & -2,5 \\ -0,5 & 0,875 \end{bmatrix}$  мСім.

**Задача 1.37.** Навести варіант схем, у яких матриці провідностей складена за методом вузлових напруг, має вигляд

а)	$G = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.2 \\ 9.8 & 2.2 \end{bmatrix}, \text{ мСім};$	б)	$G = \begin{bmatrix} 8.5 & 5.5 \\ -2.5 & 4.5 \end{bmatrix}, \text{ мСім};$
в)	$G = \begin{bmatrix} 1.5 & 9.5 \\ -0.5 & 0.75 \end{bmatrix}, \text{ мСім};$	г)	$G = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -10.5 & 0.75 \end{bmatrix}, \text{ мСім}.$

Схеми може містити опори та одне кероване джерело. Значення елементів на схемах навести в кОм (R) та мА/В (для S). Дати пояснення, чому саме так накреслена схема.

Відповідь: а)  $R_1 = 1 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 5 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = 0.5 \text{ кОм}$ ,  $S = 10 \text{ мА/В}$ ;

б)  $R_1 = 1/6 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 0.4 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = 0.5 \text{ кОм}$ ,  $S = 8 \text{ мА/В}$ ;

в)  $R_1 = 1 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 2 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = 4 \text{ кОм}$ ,  $S = 10 \text{ мА/В}$ ;

г)  $R_1 = 1 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 2 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = 4 \text{ кОм}$ ,  $S = 10 \text{ мА/В}$ .

**Задача 1.38.** Навести варіант схем, у яких матриці опорів складені за методом контурних струмів (напрями обходу обрати за годинниковою стрілкою), мають вигляд:

а)	$R = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 11 \end{bmatrix} \text{ кОм};$	б)	$R = \begin{bmatrix} 4.5 & -1.5 \\ 0.5 & 2.5 \end{bmatrix}, \text{ кОм}.$
----	--	----	---

Схеми можуть містити опори та одне кероване джерело. Значення елементів на схемах навести в кОм (R) та мА/В (для S). Дати пояснення, чому саме так накреслена схема.

Відповідь: а)  $R_1 = 4 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 3 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = 8 \text{ кОм}$ ,  $\gamma = 2$ ;

б)  $R_1 = 3 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 1.5 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = 1 \text{ кОм}$ ,  $\gamma = 2$ .

**Задача 1.39.** У колі (рис. 1.52) методом вузлових напруг та методом еквівалентних перетворень знайти напругу  $U_X$ . Джерело  $J_1 = 2I_1$  є керованим. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

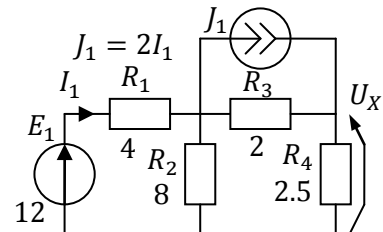


Рисунок 1.53

Відповідь:  $u_X = 6.667 \text{ В}$ .

### 1.2.8. Метод еквівалентного генератора

**Задача 1.40.** У акумулятора дослідним шляхом виміряні напруга холостого ходу  $U_{XX} = 12 \text{ В}$  та струм короткого замикання  $I_{K3} = 6 \text{ А}$ . Який опір навантаження  $R_H$  потрібно підключити до акумулятора, щоб у опорі  $R_H$  одержати максимальну потужність  $P_{max}$ . Чому дорівнює  $P_{max}$ ?

Відповідь:  $R_H = 2 \text{ Ом}$ ,  $P = 18 \text{ Вт}$ .

**Задача 1.41.** У колі (рис. 1.54) визначити максимальну потужність у навантаженні.

а) Яким повинен бути  $R_{\Gamma}$ , щоб в опорі  $R_H$  була отримана максимальна потужність. Числові значення:  $R_H = 2 \text{ кОм}$ ,  $E = 4 \text{ В}$ ;

б) Яким повинен бути опір  $R_H$ , щоб на ньому була виділена максимальна потужність. Числові значення елементів:  $R_{\Gamma} = 4 \text{ кОм}$ ,  $E = 8 \text{ В}$ .

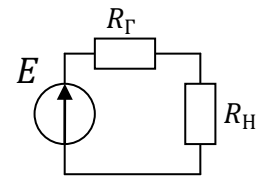


Рисунок 1.54

Відповідь: а)  $R_{\Gamma} = 0 \text{ кОм}$ ,  $P_{max} = 8 \text{ мВт}$ ;

б)  $R_H = 4 \text{ кОм}$ ,  $P_{max} = 4 \text{ мВт}$ .

**Задача 1.42.** У колах (рис. 1.55) визначити: а) при якому опорі  $R_4$  потужність, що він споживає буде максимальною, вважати  $R_3 = 3 \text{ кОм}$ ; б) при якому опорі  $R_3$  потужність, що споживається  $R_4$  буде максимальною, вважати  $R_4 = 2 \text{ кОм}$ . Визначити цю потужність. Значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

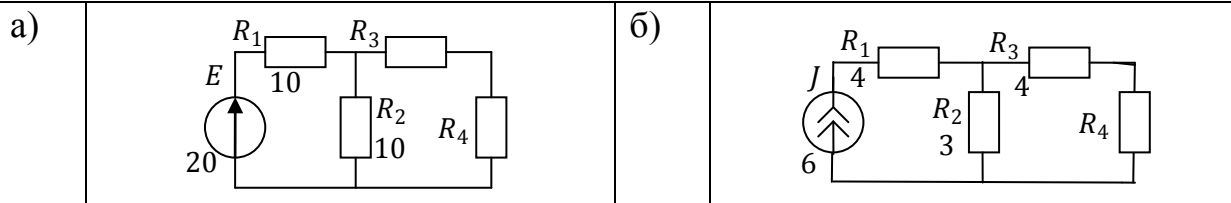


Рисунок 1.55

Відповідь: а)  $R_4 = 8 \text{ кОм}$ ,  $P_{max} = 3.125 \text{ мВт}$ ;  $R_3 = 0$ ,  $P_{max} = 4 \text{ мВт}$ ;

б)  $R_4 = 6 \text{ кОм}$ ,  $P_{max} = 13.5 \text{ мВт}$ ;  $R_3 = 0$ ,  $P_{max} \cong 26 \text{ мВт}$ .

**Задача 1.43\*** У колі (рис. 1.56) визначити максимальну потужність  $P_{4max}$  та опір  $R_4$ , коли на ньому виділиться максимальна потужність. Числові значення елементів:  $R_1 = R_2 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = R_5 = 2 \text{ кОм}$ ,  $E = 4 \text{ В}$ .

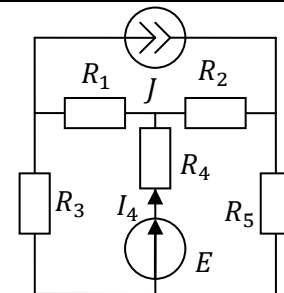


Рисунок 1.56

Відповідь:  $R_4 = 4 \text{ кОм}$ ,  $P_{4max} = 1 \text{ мВт}$ .

**Задача 1.44.** У колі (рис. 1.57) методом еквівалентного генератора знайти струм через опір: а)  $R_1$ ; б)  $R_3$ . Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

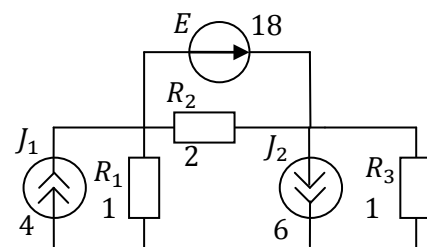


Рисунок 1.57

Відповідь: а)  $E_{\text{ЕГ}} = 20 \text{ В}$ ;  $R_{\text{ЕГ}} = 1 \text{ кОм}$ ,  $I_3 = 10 \text{ мА}$ ;

б)  $E_{\text{ЕГ}} = 16 \text{ В}$ ;  $R_{\text{ЕГ}} = 1 \text{ кОм}$ ,  $I_1 = 8 \text{ мА}$ .

**Задача 1.45.** У колах (рис. 1.58) виділену частину представити еквівалентним генератором та визначити його параметри:  $R_{\text{ЕГ}}$  та  $E_{\text{ЕГ}}$ . Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

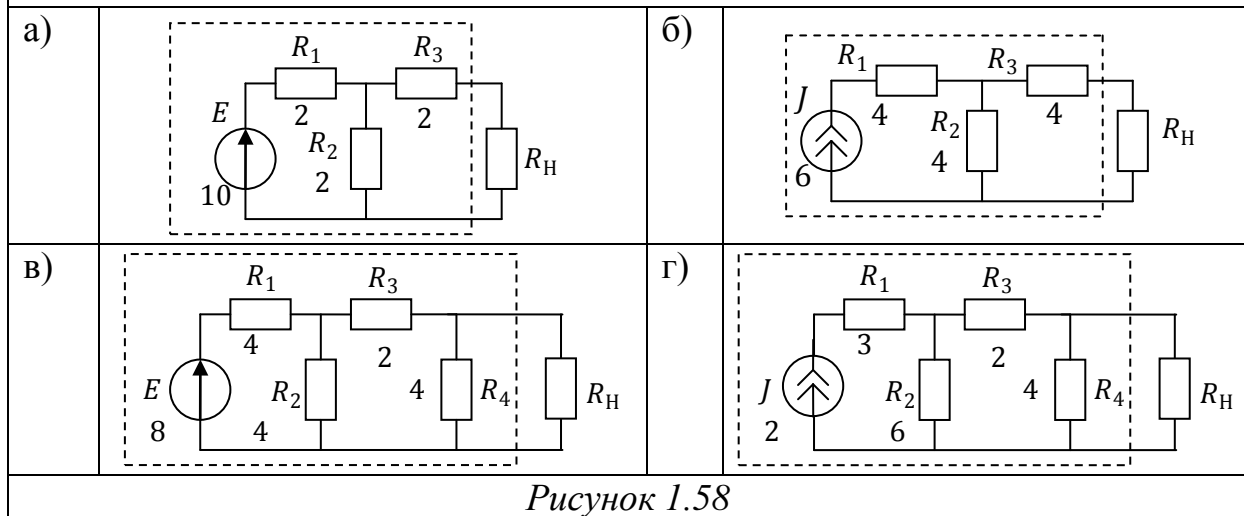


Рисунок 1.58

Відповідь: а)  $R_{\text{ЕГ}} = 3 \text{ кОм}$ ,  $E_{\text{ЕГ}} = 5 \text{ В}$ ; б)  $R_{\text{ЕГ}} = 8 \text{ кОм}$ ,  $E_{\text{ЕГ}} = 24 \text{ В}$ ;  
в)  $R_{\text{ЕГ}} = 2 \text{ кОм}$ ,  $E_{\text{ЕГ}} = 2 \text{ В}$ ; г)  $R_{\text{ЕГ}} = 8/3 \text{ кОм}$ ,  $E_{\text{ЕГ}} = 4 \text{ В}$ .

**Задача 1.46.** У колах (рис. 1.59) визначити величину та напрям струму у гілці із опором  $R_1$  методом еквівалентного генератора та визначити параметри еквівалентного генератора. Числові значення елементів наведені на схемах: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

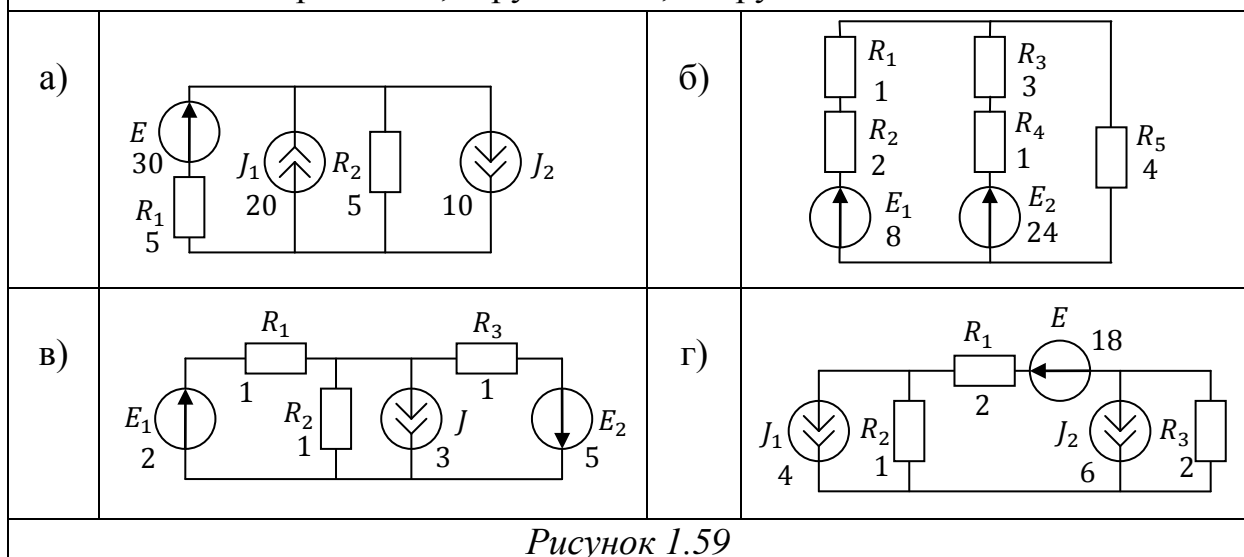


Рисунок 1.59

Відповідь: а)  $I_1 = 2 \text{ мА}$ ,  $E_{\text{ЕГ}} = 20 \text{ В}$ ,  $R_{\text{ЕГ}} = 5 \text{ кОм}$ ;  
б)  $I_1 = 0.8 \text{ мА}$ ,  $E_{\text{ЕГ}} = 4 \text{ В}$ ,  $R_{\text{ЕГ}} = 4 \text{ кОм}$ ;  
в)  $I_1 = 4 \text{ мА}$ ,  $R_{\text{ЕГ}} = 0.5 \text{ кОм}$ ,  $E_{\text{ЕГ}} = 6 \text{ В}$ ;  
г)  $I_1 = 2 \text{ мА}$ ,  $R_{\text{ЕГ}} = 3 \text{ кОм}$ ,  $E_{\text{ЕГ}} = 10 \text{ В}$ .

**Задача 1.47.** У колах (рис. 1.60) визначити напругу холостого ходу  $u_{xx}$ . Значення елементів на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

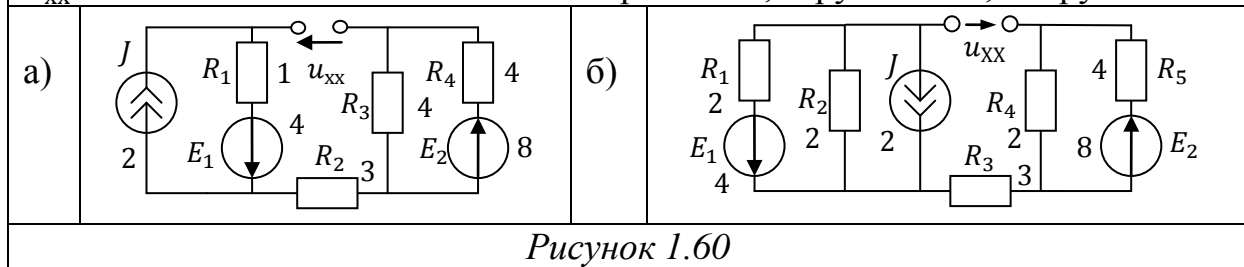


Рисунок 1.60

Відповідь: а)  $u_{xx} = 6$  В; ю)  $u_{xx} = 20/3$  В.

**Задача 1.48.** У колах (рис. 1.61) розрахувати струм  $I_1$  через опір  $R_1$  методом еквівалентного генератора. Числові значення елементів наведені на схемах: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

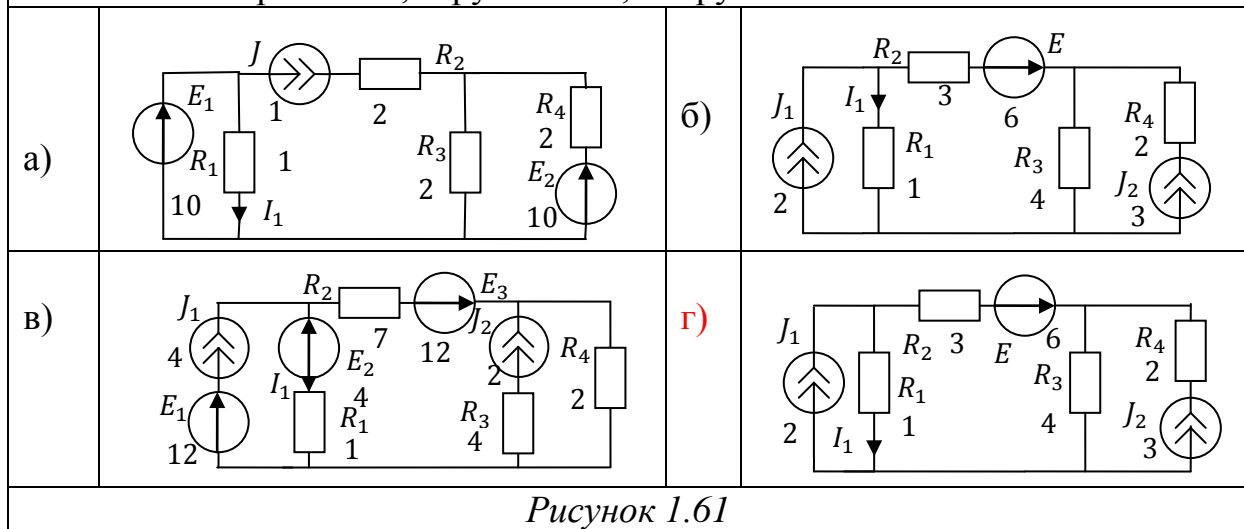


Рисунок 1.61

Відповідь: а)  $I_1 = 10$  мА; б)  $I_1 = 2.5$  мА, в)  $I_1 = 2.4$  мА; г)  $I_1 = 2.5$  мА.

**Задача 1.49\*\*.** У колі (рис. 1.62) визначити потужність в опорі  $R$  при його підключенні до точок а та б. Покази вольтметра, підключеного до точок а та б, дорівнює  $U_V = 90$  В. Покази амперметра, підключеного до тих же точок, дорівнює  $I_A = 18$  мА.

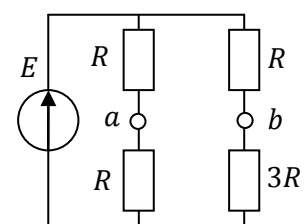


Рисунок 1.62

Відповідь:  $P_R = 400$  мВт.

**Задача 1.50.** По відношенню до вузлів а та б (рис. 1.63) визначити параметри еквівалентного генератора. Значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

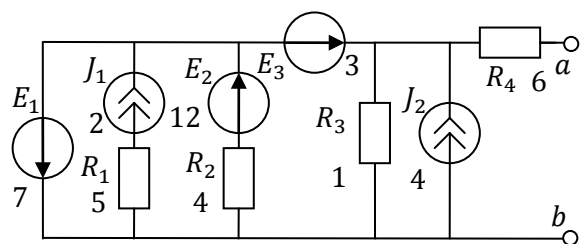


Рисунок 1.63

Відповідь:  $E_{EG} = 4$  В,  $R_{EG} = 6$  кОм.

**Задача 1.51.** У колах (рис. 1.64) знайти методом еквівалентного генератора струм  $I_X$ . Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

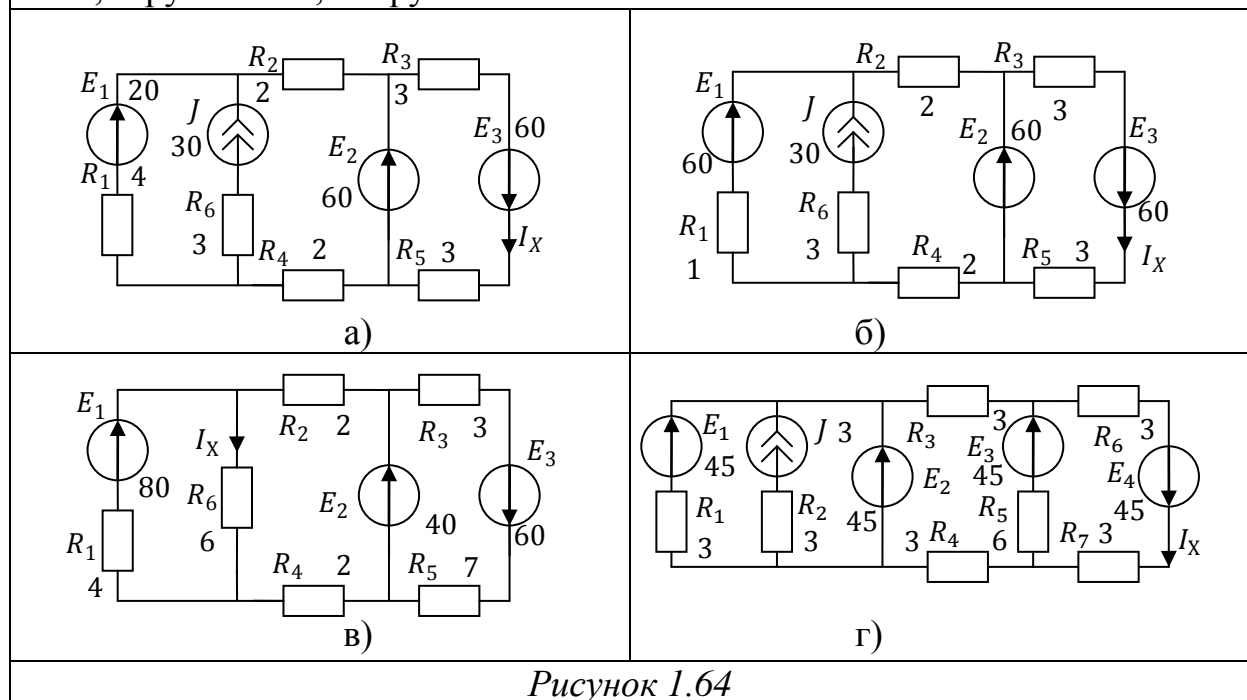


Рисунок 1.64

Відповідь: а)  $I_X = 20$  мА; б)  $I_X = 20$  мА;  
в)  $I_X = 7.5$  мА; г)  $I_X = 10$  мА.

**Задача 1.52\*** У колах (рис. 1.65) визначити параметри еквівалентного генератора (виділена частина кола) відносно опору  $R_H$ . Числові значення елементів кіл: опори в кОм, струм в мА, напруга в В,  $S$  в мА/В. Джерела:  $J_2 = Su_{20}$ ,  $E_2 = \alpha u_{20}$ ,  $J = Su_{20}$  є керованими.

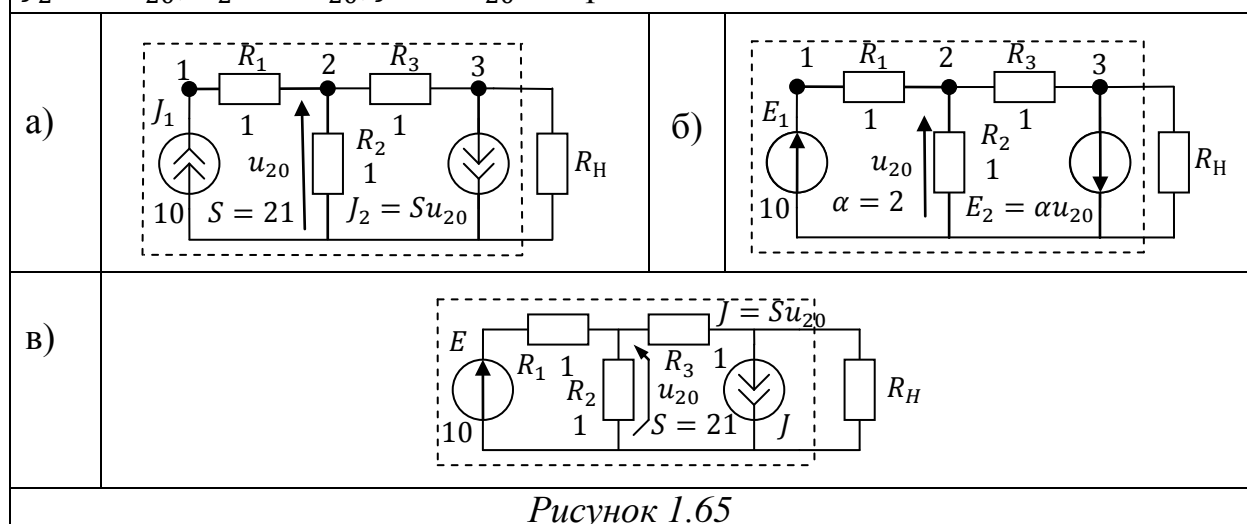


Рисунок 1.65

Відповідь: а)  $E_{EG} = -100/11$  В,  $R_{EG} = 1/11$  кОм;  
б)  $E_{EG} = 4$  В,  $R_{EG} = 2.5$  кОм;  
в)  $E_{EG} = -200/23$  В,  $R_{EG} = 3/23$  кОм.

**Задача 1.53\*\*.** У колі (рис. 1.66) визначити струм  $I_0$ . Числові значення елементів кола: опори – кОм, струм – мА, напруга – В.

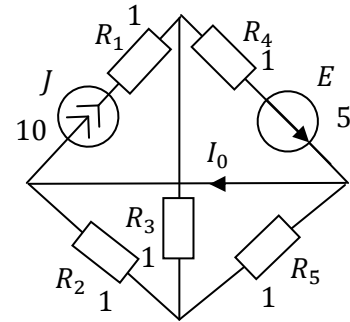


Рисунок 1.66

Відповідь:  $I_0 = 9$  мА.

### 1.2.9. Олімпіадні задачі

**Задача 1.54\*.** У колі (рис. 1.67) потужність джерела напруги  $P_E = 5$  мВт, струм  $I_2 = I_1 + I_3 = 2$  мА, причому  $E > 0$ ,  $J > 0$ . Знайти  $E$  та  $J$ . Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – А, напруги – В.

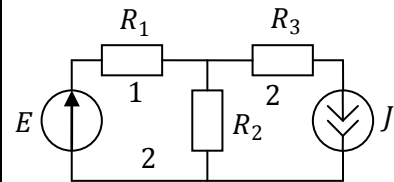


Рисунок 1.67

Відповідь:  $J = 7$  мА,  $E = 1$  В.

**Задача 1.55\*.** У колі (рис. 1.68) визначити струм  $I_3$ . Потужність джерела напруги  $P_E = 450$  мВт, струм  $I_1 > 0$ . Числові значення елементів наведені на схемі: опори – в кОм, струми – мА, напруги – В.

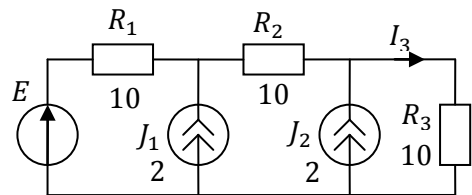


Рисунок 1.68

Відповідь:  $I_3 = 7$  мА.

**Задача 1.56\*.** У колі (рис. 1.69) визначити  $R_1, R_2, R_3$ . При  $J_2 = 1$  А, потужність  $P_3 = 4.5$  Вт, струм  $I_1 = 1.5$  А. При  $J_2 = 0$ , потужність  $P_{J1} = 5$  Вт, струм  $I_1 = 1.25$  А. Числові значення наведені на схемі: струми в А, напруги в В.

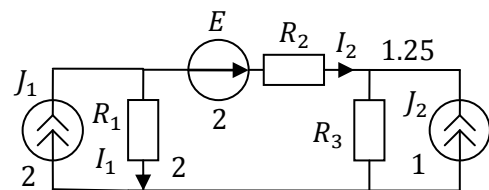


Рисунок 1.69

Відповідь:  $R_1 = 2$  Ом,  $R_2 = 4$  Ом,  $R_3 = 2$  Ом.

**Задача 1.57\***. У колі (рис. 1.70) при  $R_1 = 10 \text{ кОм}$ , потужність  $P_R = P_1 + P_2 + P_3 = 80 \text{ мВт}$ . При  $R_1 = 5 \text{ кОм}$ , потужність  $P_R = 120 \text{ мВт}$ . Знайти потужність  $P_R$ , коли  $R_1 = 8 \text{ кОм}$ .

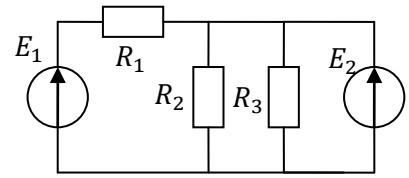


Рисунок 1.70

Відповідь:  $P_R = 90 \text{ мВт}$ .

**Задача 1.58\***. У колі (рис. 1.71)  $E_1 = 2E_2$ . При  $R_2 = 0.5R$  потужність, що споживається активними опорами  $P_R = 80 \text{ мВт}$ . При  $R_2 = R$  потужність, що споживається активними опорами становить  $P_R = 60 \text{ мВт}$ . Знайти потужність  $P_R$  при  $R_2 = 2R$ .

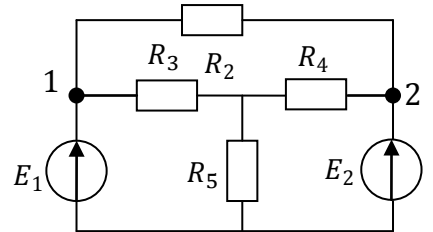


Рисунок 1.71

Відповідь:  $P_R = 50 \text{ мВт}$ .

**Задача 1.59\***. У колі (рис. 1.72) рівні напруги джерел напруги  $E_1 = E_2$ , потужність  $P_3 = 12 \text{ мВт}$ ,  $P_J = -24 \text{ мВ}$ , струм  $J > 0$ . Знайти потужність  $P_{E1}$ ,  $P_{E2}$ . Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

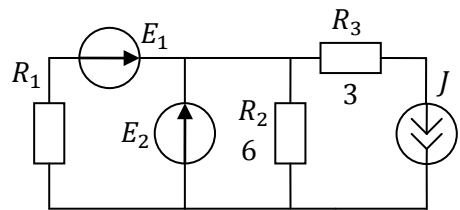


Рисунок 1.72

Відповідь:  $P_{E1} = 0$ ,  $P_{E2} = 90 \text{ мВт}$ .

**Задача 1.60\***. У колі (рис. 1.73)  $R_1 = R_2 = R_3 = R$ . При замкненому ключі  $K_1$  та розімкненому  $K_2$  потужність активних елементів становить  $P_R = P_1 + P_2 + P_3 = 60 \text{ мВт}$ . При розімкненому ключі  $K_1$  та замкненому  $K_2$  потужність активних елементів становить  $P_R = P_1 + P_2 + P_3 = 15 \text{ мВт}$ . Знайти потужність активних елементів  $P_R$  при замкненому ключі  $K_1$  та  $K_2$ .

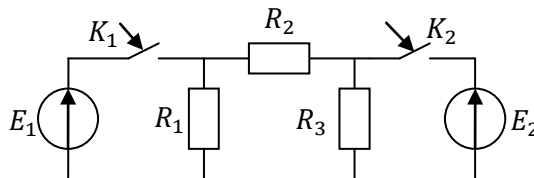


Рисунок 1.73

Відповідь:  $P_R = 60 \text{ мВт}$ .



**Задача 1.61\***. У колі (рис. 1.74) знайти потужність кожного елементу при збільшенні струму джерела струму у 2 рази. Числові значення потужностей елементів кола подані на схемі.

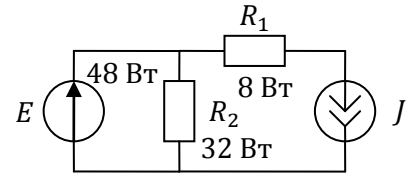


Рисунок 1.74

Відповідь:  $P_1 = 32$  Вт,  $P_2 = 32$  Вт,  $P_E = 64$  Вт,  $P_J = -32$  Вт.

**Задача 1.62\***. У колі (рис. 1.75) знайти потужності елементів. Споживана потужність кола  $P = 60$  мВт. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

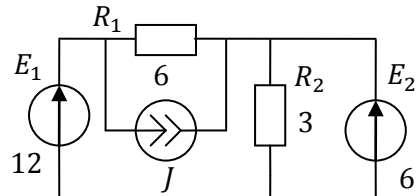


Рисунок 1.75

Відповідь:  $P_1 = 6$  мВт,  $P_2 = 12$  мВт,  $P_{E1} = 60$  мВт,  $P_{E2} = -18$  мВт,  $P_J = -24$  мВт.

**Задача 1.63\***. У колі (рис. 1.76) визначити потужності елементів кола, якщо джерела  $E_1$  та  $E_2$  поміняти місцями. Відомо, що  $E_1 = 2E_2$ , потужності елементів становлять:  $P_{E1} = 96$  мВт,  $P_{E2} = -18$  мВт,  $P_{J2} = -16$  мВт,  $P_1 = 18$  мВт,  $P_2 = 8$  мВт.

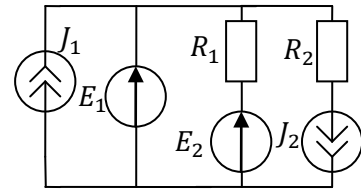


Рисунок 1.76

Відповідь:  $P_1 = 18$  мВт,  $P_2 = 8$  мВт,  $P_{E1} = 2$  мВт,  $P_{E2} = 18$  мВт,  $P_{J1} = 18$  мВт,  $P_{J2} = -12$  мВт.

**Задача 1.64\***. У колі (рис. 1.77) опори  $R_1 = R_2 = R_5 = 2R$ ,  $R_6 = 0.4R$ ,  $R_3 = R_4 = R$ .

Знайти потужність, що споживається колом  $P_R$ , за умови  $J = 6$  мА,  $U_5 = 2.5$  В.

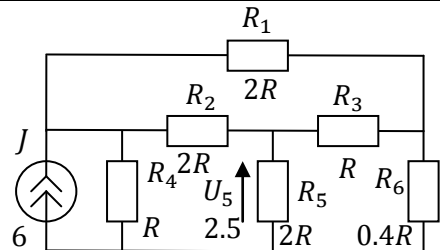


Рисунок 1.77

Відповідь:  $P_R = 42$  мВт.

**Задача 1.65\***. У колі (рис. 1.78) визначити струми  $J_1$  та  $J_2$ .  $RE$  – це двополюсник із активними опорами та джерелами. Опір  $R = 10$  кОм. При замкненому ключі  $K$  потужність  $P_{J_2} = 40$  мВт. При розімкненому ключі  $K$  потужності  $P_{J_1} = 240$  мВт,  $P_{J_2} = -40$  мВт.

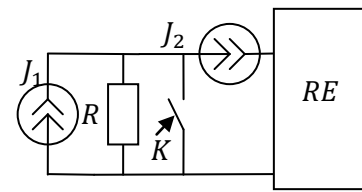


Рисунок 1.78

Відповідь:  $J_1 = 6$  мА та  $J_2 = 2$  мА.

**Задача 1.66\***. У колі (рис. 1.79) визначити струм  $I_2$  при  $E = 0$  та  $R_1 = 2$  кОм. При  $R_1 = 6$  кОм, струми  $I_1 = 2.5$  мА,  $I_2 = 5$  мА. При  $R_1 = 2$  кОм, струм  $I_2 = 6$  мА. Для двох випадків значення джерела напруги становить  $E = 20$  В. Двополюсник  $RE$  є активним.

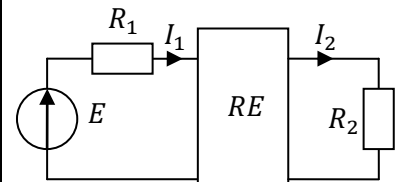


Рисунок 1.79

Відповідь:  $I_2 = 4$  мА.

**Задача 1.67\***. У колі (рис. 1.80) визначити потужність  $P_2$  при  $R_1 = 2.5$  кОм.

При  $R_1 = 7.5$  кОм, потужність  $P_2 = 3$  мВт. При  $R_1 = 2$  кОм, потужність  $P_2 = 16/3$  мВт. Двополюсник  $R$  є пасивним.

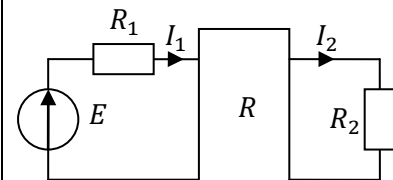


Рисунок 1.80

Відповідь:  $P_2 = 12$  мВт.

**Задача 1.68\*\*\***. У колі (рис. 1.81) визначити значення опору  $R$ . Ідеальне джерело струму  $J$  видає  $W_J = 1500$  мДж електричної енергії за одну хвилину.

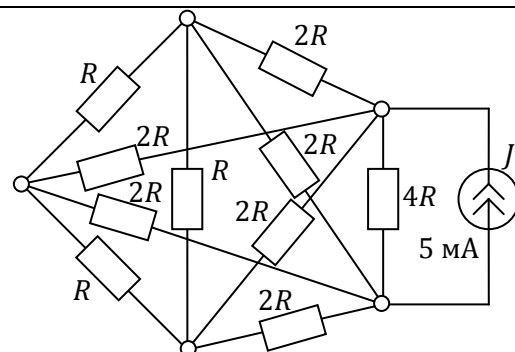


Рисунок 1.81

Відповідь:  $R = 1$  кОм.

## 2. ЗМІННИЙ СТРУМ

### 2.1 Короткі теоретичні відомості

#### 2.1.1. Поняття про змінний струм

**Змінний струм** – струм, який змінюється у часі за величиною (рис. 2.1).

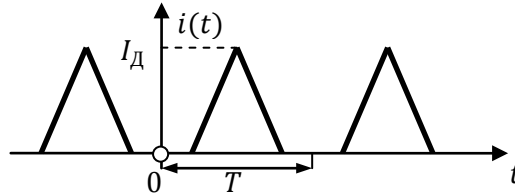


Рисунок 2.1

Середнє значення (average value) змінного струму

$$I_{\text{СЕР}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} i(t) dt}{t_2 - t_1}.$$

Під діючим значенням періодичного струму (рис. 2.1) розуміють таке значення постійного струму при якому за один і той же час на опорі  $R$  виділиться одна й та ж сама енергія, а найменші проміжки часу, через які ці повторення спостерігаються – періодом  $T$ .

$$I_d = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}.$$

#### 2.1.2. Поняття про гармонічний струм

**Гармонічний струм (напруга)** – це періодичний струм (напруга), що є гармонічною функцією часу (рис. 2.2).

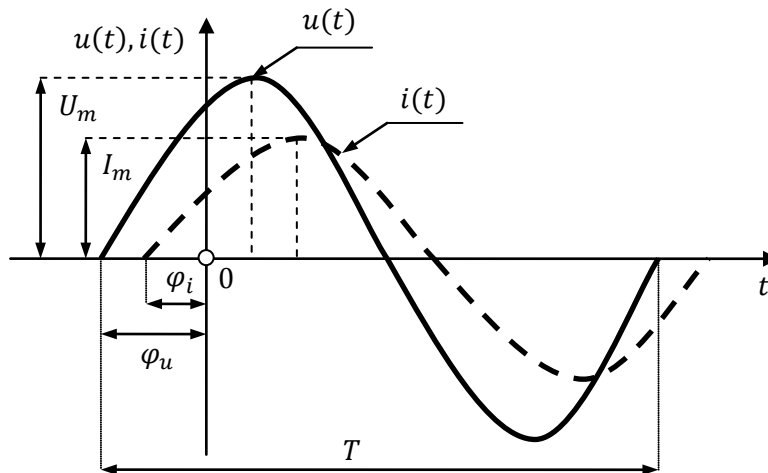


Рисунок 2.2

Гармонічні значення струму та напруги:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i); \quad u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u),$$

де  $I_m$  – амплітуда струму,  $U_m$  – амплітуда напруг,  $\omega$  – кутова частота,  $\varphi_i$  – початкова фаза струму,  $\varphi_u$  – початкова фаза напруги.

Кутова частота обчислюється за формулою

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Частота струму  $f$  зв'язана з періодом  $T$  залежністю  $f = 1/T$ . Кутова частота вимірюється у рад/с, а частота – у герцах (Гц).

Якщо необхідно знайти різницю фаз між двома гармонічними струмами (напругами), то користуються поняттям зсув фази:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i.$$

Діюче значення гармонічного струму, напруги та ЕРС визначається

$$U_d = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad I_d = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad E_d = \frac{E}{\sqrt{2}}.$$

**Векторна діаграма** – це графічне зображення змінної за гармонічним законом (синуса або косинуса) величин та співвідношень між ними за допомогою направлених відрізків – векторів (рис. 2.3).

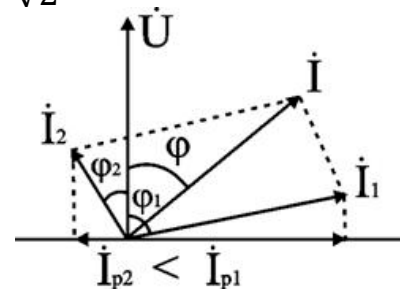
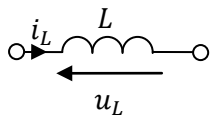


Рисунок 2.3

**Індуктивність** позначається  $L$  (рис. 2.4) та вимірюється у генрі (Гн).



Індуктивність кількісно визначається відношенням потокозчеплення  $\psi$ , до струму, що створює магнітне поле

$$L = \frac{\psi}{i}.$$

Рисунок 2.4

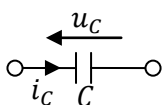
У разі лінійної індуктивності напруга та струм

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt.$$

Миттєва потужність, що надходить в індуктивність

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt = \frac{Li^2}{2}.$$

**Ємність** визначається



$$C = \frac{q}{u}.$$

Рисунок 2.5

Умовне зображення ємності наведене на рис. 2.5. Одиницею виміру є фарада (Ф).

У разі лінійності ємності струм та напруга

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt.$$

Миттєва енергія електричного поля, що накопичується на ємності

$$w_C(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt = \frac{Cu^2}{2}.$$

Для **гармонічного струму**  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$  визначимо напруги у колі (рис. 2.6).

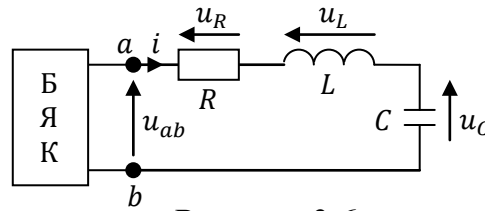


Рисунок 2.6

$$u_R(t) = i(t) \cdot R = I_m \cdot R \cos(\omega t + \varphi_i) = U_{mR} \cos(\omega t + \varphi_u),$$

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -\omega L I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) = U_{mL} \cos(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2})$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = U_{mC} \cos(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2})$$

Отже,  $U_{mR} = I_m \cdot R$  – це амплітудне значення напруги на опорі;  $U_{mL} = \omega L I_m = X_L I_m$  – це амплітудне значення напруги в індуктивності, а  $X_L = \omega L$  – індуктивний опір;  $U_{mC} = I_m 1/(\omega C)$  – це амплітудне значення напруги на ємності, а  $X_C = 1/(\omega C)$  – ємнісний опір.

Графічне зображення напруг та струмів на комплексній площині, що називають векторною діаграмою (рис. 2.7). На рис. 2.7 а подана векторна діаграма кола, коли  $u_L > u_C$ , а на рис. 2.7 б –  $u_L < u_C$ .

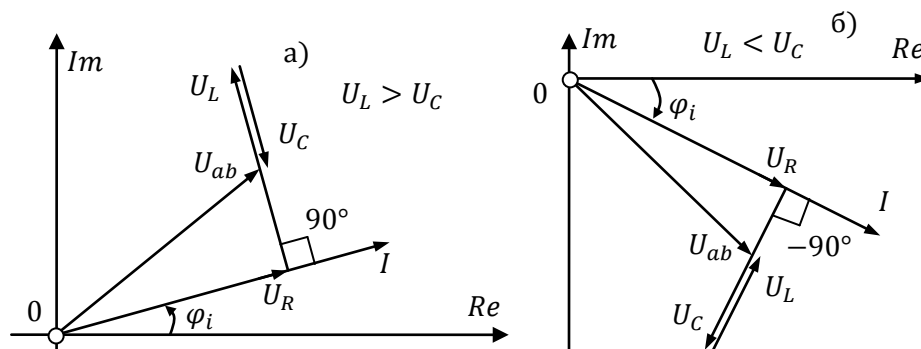


Рисунок 2.7

Комплексні та реактивний індуктивний та ємнісний опори:

$$Z_L = j\omega L = jX_L = X_L e^{j90^\circ};$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_C = X_C e^{-j90^\circ}.$$

Розглянемо коло, що містить паралельне з'єднання елементів (рис. 2.8), причому напруга на вході змінюється за законом  $u_{ab}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ .

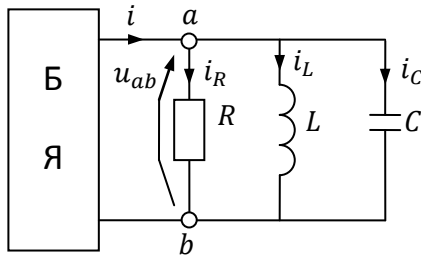


Рисунок 2.8

Комплексна провідність кола

$$Y = g + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = g + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = g + j(b_C - b_L) = g + jb.$$

На рис. 2.9 подана геометрична інтерпретація на комплексній площині закону Ома. Коли  $b_C > b_L$  реактивна провідність кола має ємнісний характер (рис. 2.9 а), а коли  $b_C < b_L$  реактивна провідність кола має індуктивний характер (рис. 2.9 б).

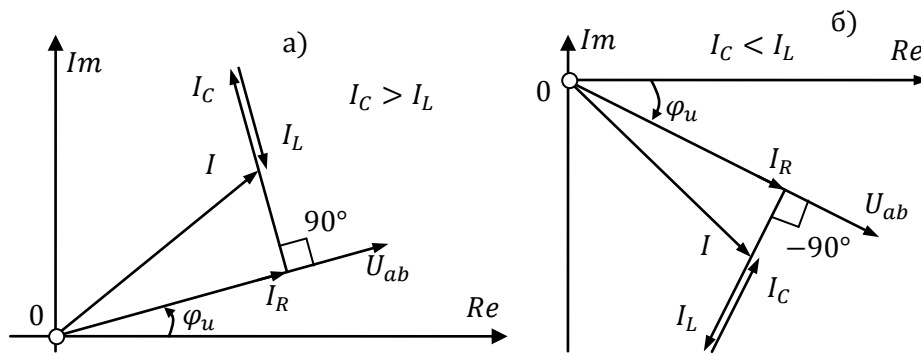


Рисунок 2.9

### Еквівалентні перетворення

Для послідовного з'єднання активних та пасивних елементів (рис. 2.10 а) схему можна спростити (рис. 2.10 б) та записати еквівалентні параметри:

$$\begin{aligned} L_E &= L_1 + \dots + L_m, \\ \frac{1}{C_E} &= \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_k}, \\ E_E &= E_1 - \dots - E_p. \end{aligned}$$

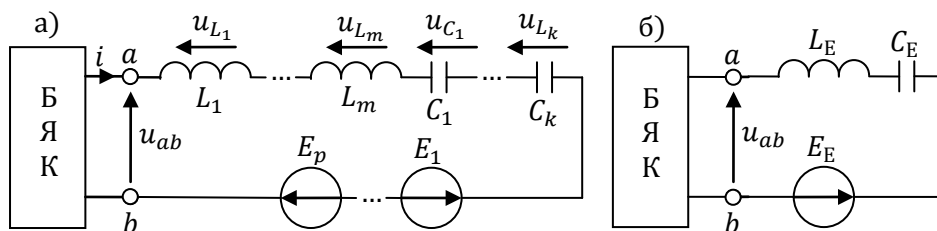


Рисунок 2.10

Для паралельного з'єднання активних та пасивних елементів (рис. 2.11 а) схему можна спростити (рис. 2.11 б).

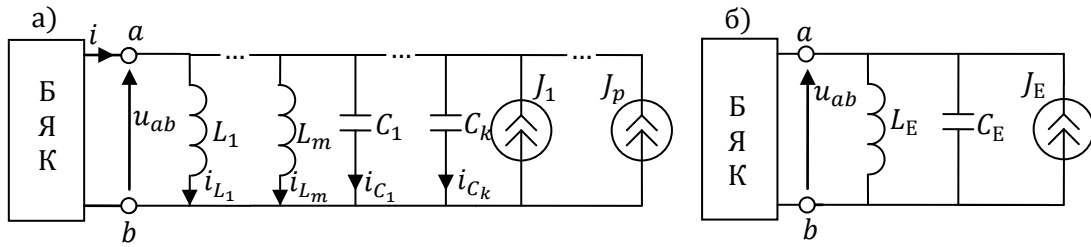


Рисунок 2.11

Еквівалентні параметри:

$$\begin{aligned} C_E &= C_1 + \dots + C_m, \\ \frac{1}{L_E} &= \frac{1}{L_1} + \dots + \frac{1}{L_k}, \\ J_E &= J_1 + \dots + J_p. \end{aligned}$$

**Метод комплексних амплітуд** – це метод розрахунку лінійних електричних кіл, що містять реактивні елементи в усталеному гармонічному режимі. Суть методу полягає у тому, що для всіх реактивних елементів визначається їх комплексний імпеданс, всі струми та напруги представляються комплексними амплітудами.

Продиференціюємо поточний комплекс напруги

$$\frac{d\dot{U}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [Ue^{j(\omega t + \varphi)}] = j\omega Ue^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega U(t).$$

Проінтегруємо поточний комплекс

$$\int \dot{U}(t) dt = \int Ue^{j(\omega t + \varphi)} dt = \frac{U}{j\omega} e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{\dot{U}(t)}{j\omega}.$$

Операції диференціювання у часовій області у комплексній області відповідає множенню на  $j\omega$ , а операції інтегрування у часовій області у комплексній області відповідає діленням на  $j\omega$ .

**Закон Ома** у комплексній формі

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z(\omega)},$$

де

$$Z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + jX_L - jX_C = R + j(X_L - X_C).$$

Вираз  $Z(\omega)$  називають повним комплексним опором кола або імпедансом. Його можна переписати у вигляді  $Z(\omega) = |Z|e^{j\varphi}$ .

Модуль  $|Z|$  та аргумент  $\varphi$  комплексного опору визначаються

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}; \quad \varphi = \arctg\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right).$$

Аналогічно вводяться поняття повної  $Y$ , активної  $G$  та реактивної  $B$  провідностей. Отже, повна провідність визначається  $Y = G + jB$  та вимірюється у Сіменсах (Сім).

**Імпеданс** – повний комплексний опір кола.

**Адмітанс** – повна комплексна провідність кола.

**Імітанс** – це узагальнене поняття імпеданса та адмітанса, з яким не пов'язані одиниці виміру.

**Кондуктанс** – це дійсна частина адмітанса, **сусцептанс** – це уявна частина адмітанса.

**Перший закон Кірхгофа:**

Алгебраїчна сума комплексних амплітуд струмів (чи комплексних струмів) у вузлі дорівнює нулю

$$\sum I_k = 0, \quad \sum I_{mk} = 0.$$

**Другий закон Кірхгофа**

Алгебраїчна сума комплексних амплітуд напруг (чи комплексних напруг) по контуру обходу дорівнює нулю

$$\sum U_k = 0, \quad \sum U_{mk} = 0.$$

Правила запису рівнянь залишаються такими, як і для електричних кіл постійного струму.

Про реактивні складові струму та напруги йде мова, тільки коли є проекція вектора напруги на вектор струму або навпаки.

Складову напруги, яка за фазою збігається зі струмом називатися **активною складовою напруги**, а та складова напруги, вектор якої перпендикулярний до вектора струму, називається **реактивною складовою напруги** (рис. 2.12)

$$U_a = U \cos \varphi; \quad U_p = U \sin \varphi.$$

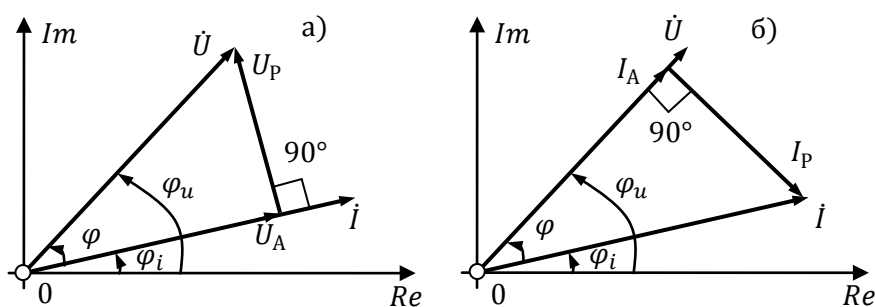


Рисунок 2.12

Аналогічно складову струму, яка за фазою збігається з напругою будемо називати **активною складовою струму**, а ту складову струму, вектор якої перпендикулярний до вектора напруги, будемо називати **реактивною складовою струму**

$$I_a = I \cos \varphi; \quad I_p = I \sin \varphi.$$



Повна **потужність** визначається

$$S = \frac{\dot{U}_m \cdot \dot{I}_m^*}{2} = \frac{\dot{U}_m \cdot \dot{I}_m^*}{2} \cos \varphi + j \frac{\dot{U}_m \cdot \dot{I}_m^*}{2} \sin \varphi = P + jQ,$$

де  $P = U_m \cdot I_m^* \cos \varphi / 2$  – це активна потужність;  $Q = U_m \cdot I_m^* \sin \varphi / 2$  – це реактивна потужність;  $I_m^* = I_m e^{-j\varphi}$  – спряжений комплекс струму.

Графічне зображення залежності між повною  $S$ , активною  $P$  і реактивною  $Q$  потужностями називають трикутником потужностей (рис. 2.13)

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Коефіцієнт потужності:

$$k_P = \cos \varphi = \frac{P}{S}.$$

На комплексній площині  $S$  зображає гіпотенузу прямокутного трикутника, катетами якого є  $P$  та  $Q_L$  (рис. 2.13 а), а на рис. 2.13 б катетами є  $P$  та  $Q_C$ .

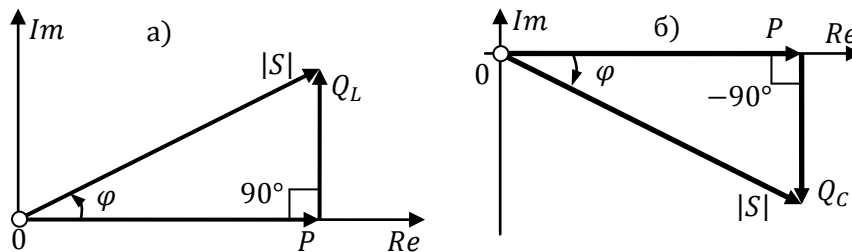


Рисунок 2.13

**Закон балансу потужностей**

$$\begin{aligned} \sum S_{\text{ДЖ}} &= \sum S_{\text{СП}}, \quad \sum S_{\text{ДЖ}} = \sum S_E + \sum S_J; \quad \sum S_{\text{СП}} = \sum P_{\text{СП}} + j \sum Q_{\text{СП}}; \\ S_E &= \dot{E} \cdot \dot{I}_E^*; \quad S_J = \dot{U}_J \cdot \dot{J}^*; \quad P_{\text{СП}} = |I|^2 R; \quad Q_{\text{СП}} = |I|^2 X; \\ \sum_{k=1}^{Ne} \dot{E}_k \dot{I}_k^* + \sum_{t=1}^{Nj} \dot{E}_t \dot{I}_t^* &= \sum_{a=1}^{Na} |I_a|^2 R_a + j \left( \sum_{b=1}^{NL} |I_b|^2 X_{L.b} - \sum_{d=1}^{Nc} |I_d|^2 X_{C.d} \right). \end{aligned}$$

**Добротність гілки** – це відношення із точністю до коефіцієнту  $2\pi$  максимально запасеної енергії до енергії, що витрачається за період

$$Q_X = 2\pi \frac{W_{\text{max}}}{W_{RT}}.$$

Таким чином, добротність гілки (рис. 2.14) визначається

$$Q_x = \frac{Q}{P} = \frac{I^2 X}{I^2 R} = \frac{X}{R}.$$

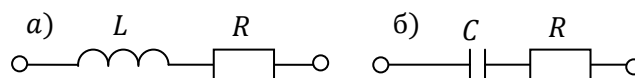


Рисунок 2.14

### Передача максимальної активної потужності у навантаження

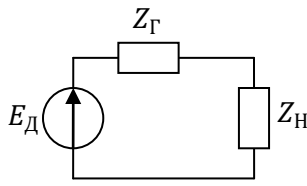


Рисунок 2.15

У колі (рис. 2.15) комплексні опори генератора  $Z_G$  та навантаження  $Z_H$ :

$$Z_G = R_G + jx_G, \quad Z_H = R_H + jx_H.$$

На вході кола діє гармонічна напруга

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Умова передачі максимальної потужності у навантаженні

$$P_{MAX} = \frac{E_D^2}{4R_H}, \quad Z_H = Z_G^* \text{ за умови, що } Z_H \text{ змінне};$$

$$P_{MAX} = \frac{E_D^2}{R_H}, \quad X_H = X_G, \quad R_G = 0 \text{ за умови, що } Z_G \text{ змінне}.$$

### 2.1.3. Поняття про кола із магнітними зв'язками

**Кола із індуктивно зв'язаними елементами** – це кола, в яких при зміні у часі струмів індуктивних елементів, що здійснюють взаємний вплив один на одного (рис. 2.16).

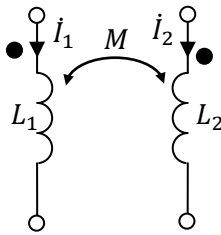


Рисунок 2.16

Взаємна індуктивність  $M$  вимірюють у генрі (Гн), є кількісною характеристикою явища взаємної індукції.

Коефіцієнта індуктивного зв'язку

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}},$$

де  $L_1$  та  $L_2$  - індуктивності котушок, між якими існує взаємоіндуктивний зв'язок.

Опір взаємоіндукції  $X_M = \omega M$ .

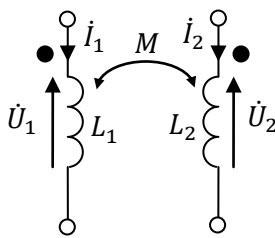


Рисунок 2.17

Узгоджене протікання струмів (рис. 2.17).

Напруга

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt},$$

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2.$$

Опір  $Z_{Y3} = j(X_L + X_M)$ .

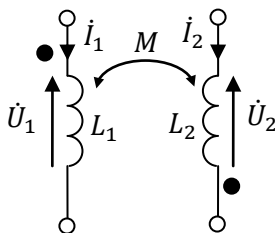


Рисунок 2.18

Неузгоджене протікання струмів (рис. 2.18).

Напруга

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt},$$

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2.$$

Опір  $Z_{HEY3} = j(X_L - X_M)$ .

У колі (рис. 2.19 а) за узгодженого протікання струмів магнітні зв'язки можна замінити керованими джерелами (рис. 2.19 б) або виконати розв'язку (рис. 2.19 в).

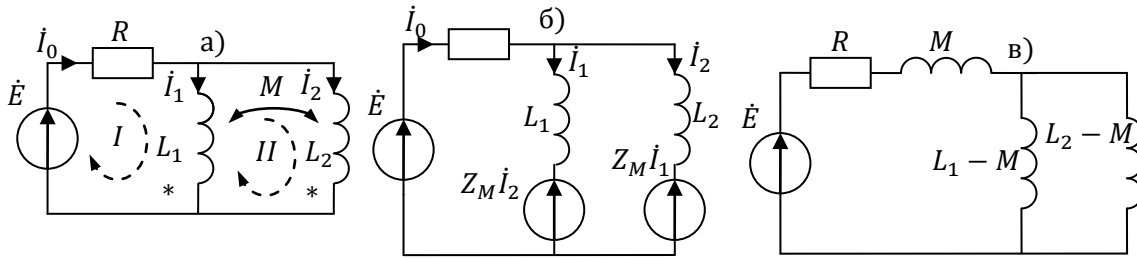


Рисунок 2.19

**Трансформатор** – прилад, що призначений для передачі енергії із однієї частини схеми у іншу через взаємодукцію.

На рис. 2.20 а подана двоконтурна схема заміщення трансформатора

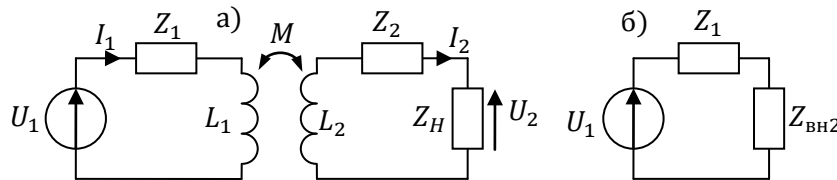


Рисунок 2.20

Коефіцієнт трансформації ідеального трансформатора (трансформатор, у якого немає втрат та немає розсіювання)

$$n = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}.$$

Якщо  $n > 1$ , то трансформатор підвищуючий, та коли  $n < 1$  – понижаючий.

Запишемо систему рівнянь, що описує трансформатор (рис. 2.20 а):

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_1 \dot{I}_1 + jx_{L1} \dot{I}_1 \pm jx_{36} \dot{I}_2; \\ 0 = Z_2 \dot{I}_2 + jx_{L2} \dot{I}_2 \pm jx_{36} \dot{I}_1. \end{cases}$$

Двоконтурну трансформаторну схему можна звести до одноконтурної по відношенню до першого контуру (рис. 2.20 б), параметри якої визначаються

$$Z_{BH2} = \frac{x_{36}^2}{R_2 + jx_{L2}} = \frac{x_{36}^2}{|R_2 + jx_{L2}|^2} R_2 - j \frac{x_{36}^2}{|R_2 + jx_{L2}|^2} x_2 = R_{BH2} + jX_{BH2},$$

де

$$R_{BH2} = \frac{x_{36}^2}{|R_2 + jx_{L2}|^2} R_2 = \frac{x_{36}^2}{|Z_2|^2} R_2;$$

$$X_{BH2} = -\frac{x_{36}^2}{|R_2 + jx_{L2}|^2} x_2 = -\frac{x_{36}^2}{|Z_2|^2} x_2.$$

## 2.2 Задачі для самостійного розв'язання

### 2.2.1. Періодичний негармонічний струм

**Задача 2.1.** Для негармонічного струму визначити: а) діюче значення періодичного струму  $T = 20$  мкс,  $t_1 = 5$  мкс,  $I_m = 6$  мА (рис. 2.21 а);

б) діюче значення періодичного струму  $T = 100$  мкс,  $t_1 = 25$  мкс,  $t_2 = 50$  мкс,  $I_m = 2$  мА (рис. 2.21 б);

в) таку тривалість імпульсу  $t_1$ , щоб діюче значення періодичного струму (рис. 2.21 а) було  $I_D = 3$  мА з амплітудним значенням  $I_m = 6$  мА та періодом  $T = 20$  мкс;

г) такий період  $T$ , щоб діюче значення періодичного струму (рис. 2.21 а) дорівнювало  $I_D = 3$  мА з тривалістю  $t_1 = 5$  мкс та амплітудним значенням  $I_m = 6$  А.

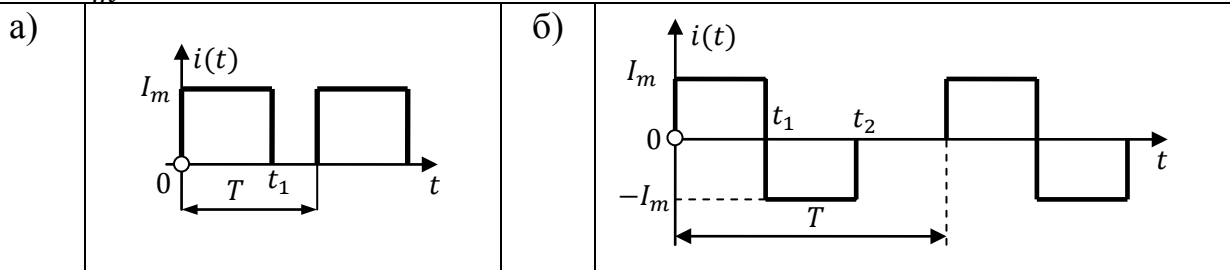


Рисунок 2.21

Відповідь: а)  $I_D = 3$  мА; б)  $I_D = \sqrt{2}$  мА; в)  $t_1 = 5$  мкс; г)  $T = 20$  мкс.

**Задача 2.2.** Для негармонічного струму (рис. 2.22) визначити:

а) за якого значення періоду  $T$  діюче значення періодичного струму становить  $I_D = 2$  мА, якщо відомі  $t_3 = 100$  мкс,  $t_1 = 25$  мкс,  $t_2 = 50$  мкс,  $I_m = 3$  мА.

б) за якого значення амплітуди струму  $I_m$  діюче значення періодичного струму становить  $I_D = \sqrt{2}$  мА, якщо відомі  $t_1 = 25$  мкс,  $t_2 = 50$  мкс,  $t_3 = 100$  мкс, періоду  $T = 450$  мкс.

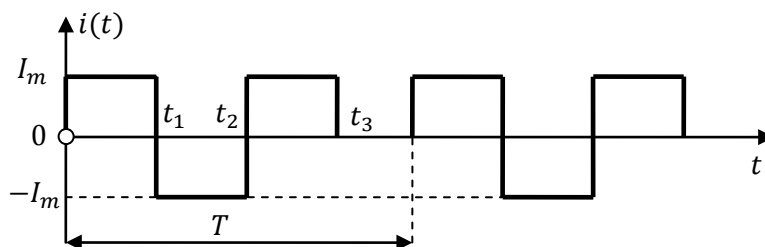


Рисунок 2.22

Відповідь: а)  $T = 225$  мкс; б)  $I_m = 3$  мА.

**Задача 2.3.** Для негармонічної напруги (рис. 2.23) визначити:

- а) за якої амплітуди напруги  $U_m$  діюче значення періодичної напруги є  $U_D = 2$  В. Відомо, що  $T = 28$  мкс,  $t_1 = 2$  мкс,  $t_2 = 4$  мкс,  $t_3 = 6$  мкс;  
 б) за якого значення періоду  $T$  напруги  $U_m$  та  $U_D$  будуть співвідноситись як 3:1, якщо відомі  $t_1 = 2$  мкс,  $t_2 = 4$  мкс,  $t_3 = 6$  мкс,

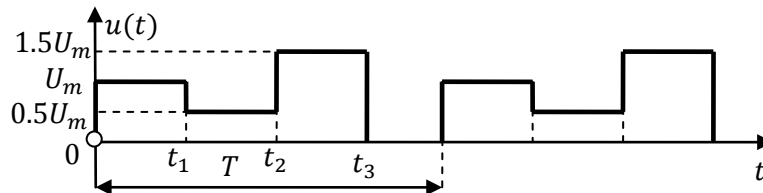


Рисунок 2.23

Відповідь: а)  $U_m = 4$  В; б)  $T = 63$  мкс.

**Задача 2.4.** Визначити діюче значення заданого періодичного струму (рис. 2.24), якщо відомі  $T$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $a$ . Виведення повинне бути повним.

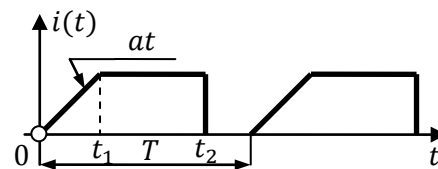
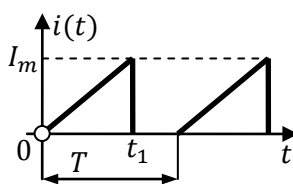


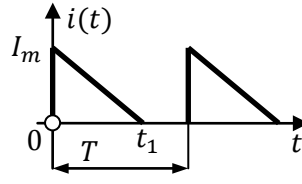
Рисунок 2.24

Відповідь:  $I_D = \sqrt{\frac{a^2 t_1^2}{T} \left( t_2 - \frac{2t_1}{3} \right)}$ .

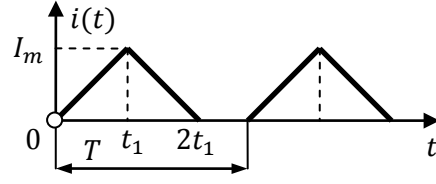
**Задача 2.5.** Визначити діюче значення періодичного струму (рис. 2.25). Відомо, що період, тривалість та амплітуда є відповідно: а)  $T = 16$  мкс,  $t_1 = 3$  мкс,  $I_m = 8$  мА (рис. 2.25 а); б)  $T = 30$  мкс,  $t_1 = 10$  мкс,  $I_m = 9$  мА (рис. 2.25 б); в)  $T = 45$  мкс,  $t_1 = 10$  мкс,  $I_m = 9$  мА (рис. 2.25 в).



а)



б)



в)

Рисунок 2.25

Відповідь: а)  $I_D = 2$  мА, б)  $I_D = 3$  мА; в)  $I_D = 2\sqrt{3}$  мА.

**Задача 2.6.** Визначити таку амплітуду імпульсів напруги  $U_m$ , щоб діюче значення Періодична напруга  $u(t)$  (рис. 2.26) було  $U_D = 2$  В. Відомо, що тривалість  $t_1 = 3$  мкс та період  $T = 16$  мкс.

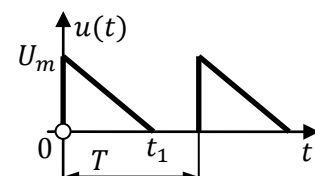


Рисунок 2.26

Відповідь:  $U_m = 8$  В.

### 2.2.2. Гармонічний струм та напруга

**Задача 2.7.** У колах (рис. 2.27) знайти: напругу  $e(t)$  або струму  $i(t)$ . Відомо, що опори  $R_1, R_2$  активні та напруга в В, струм в мА:

а)  $u_1(t) = 10 \cos(\omega t)$ ,  $u_2(t) = 10 \cos(\omega t + 60^\circ)$ ,  $u_3(t) = 10 \cos(\omega t - 60^\circ)$ , вольтметр  $V$  показує діюче значення  $30/\sqrt{2}$  В; б) амперметр  $A$  показує діюче значення  $50/\sqrt{2}$  мА,  $i_1(t) = 10 \cos(\omega t)$ ,  $i_2(t) = 10 \cos(\omega t + 30^\circ)$ ,  $i_3(t) = 10 \cos(\omega t - 30^\circ)$ .

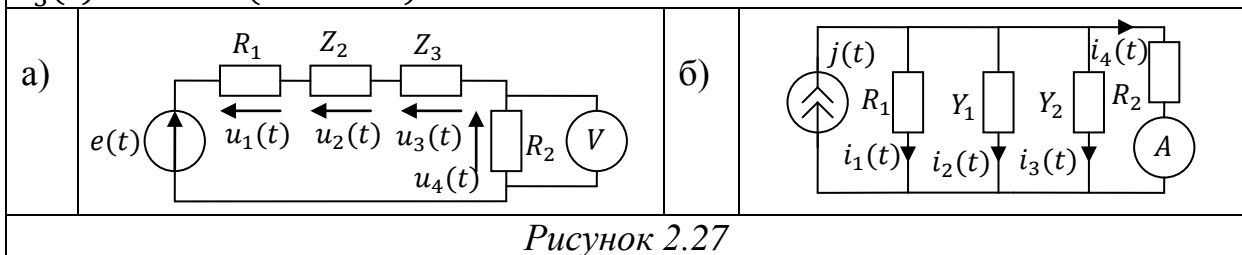


Рисунок 2.27

Відповідь: а)  $E_m = 50$  В,  $\varphi_E = 0$ ,  $e(t) = 50 \cos(\omega t)$  В;

б)  $I_m = 99.3$  мА,  $\varphi_I = 0$ ,  $j(t) = 99.3 \cos(\omega t)$  мА.

**Задача 2.8.** У колі (рис. 2.28) знайти вираз напруги  $u_{16}(t)$ , якщо на зовнішніх затискачах активного багатополіюсника є напруги в вольтах:

$u_{12} = 20 \cos(\omega t)$ ,  $u_{23} = 10 \cos(\omega t + 60^\circ)$ ,  
 $u_{34} = 10 \cos(\omega t - 60^\circ)$ ,  $u_{54} = 10 \cos(\omega t)$ ,  
 $u_{56} = 15 = \text{const.}$

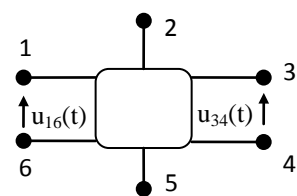


Рисунок 2.28

Відповідь:  $u_{16}(t) = 20 \cos \omega t + 15$ .

**Задача 2.9.** У колі (рис. 2.29) в усталеному гармонічному режимі на частоті  $\omega$  визначити показання вольтметра  $V$ . На цій частоті:  $X_{L2} = X_{C1} = 10$  кОм. Показання вольтметрів:  $V_1 = 3$  В,  $V_2 = 12$  В,  $V_3 = 16$  В.

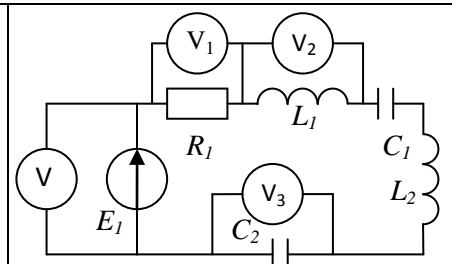


Рисунок 2.29

Відповідь:  $U_V = 5$  В.

**Задача 2.10.** У колі (рис. 2.30) знайти показання амперметрів  $A_2$  та  $A_4$ . Інші амперметри показують такі значення:  $A_1 = 5$  мА,  $A_3 = 5$  мА,  $A_5 = 3$  мА.

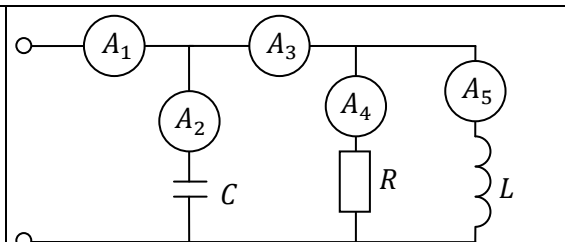


Рисунок 2.30

Відповідь:  $I_2 = 6$  мА,  $I_4 = 4$  мА.

**Задача 2.11.** У колах (рис. 2.31) в усталеному гармонічному режимі на частоті  $\omega$  визначити струм у амперметрі А. На цій частоті виконується  $X_{L2} = X_{C2} = 2 \text{ кОм}$  та такі показання:

- а)  $A_1 = 3 \text{ мА}$ ,  $A_2 = 12 \text{ мА}$ ,  $A_3 = 16 \text{ мА}$ ;  
 б)  $A_1 = 6 \text{ мА}$ ,  $A_2 = 10 \text{ мА}$ ,  $A_3 = 2 \text{ мА}$ .

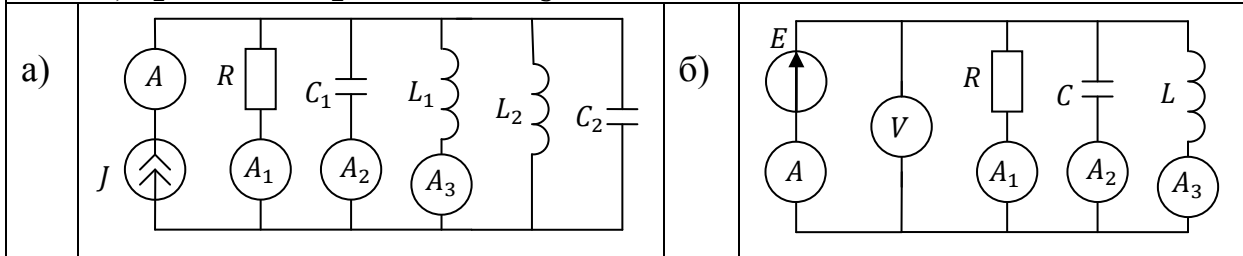


Рисунок 2.31

Відповідь: а)  $I_A = 5 \text{ мА}$ ; б)  $I_A = 10 \text{ мА}$ .

### 2.2.3. Закон Ома, еквівалентні перетворення пасивних елементів

**Задача 2.12.** У колах (рис. 2.32) визначити вираз струму  $i(t)$  або  $j(t)$ . Відомо, що числові значення елементів: а)  $e(t) = 10 \cos(\omega t + 50^\circ) \text{ В}$ ; б)  $u_j(t) = 3 \cos(\omega t + 63.1^\circ) \text{ В}$ ; в)  $e(t) = 2\sqrt{2} \cos(\omega t + 20^\circ) \text{ В}$ ; г)  $u_j(t) = 12 \cos(\omega t + 30^\circ) \text{ В}$ . Якісно побудувати векторну діаграму струмів та напруг. Числові значення: опори в кОм, провідності в мСім.

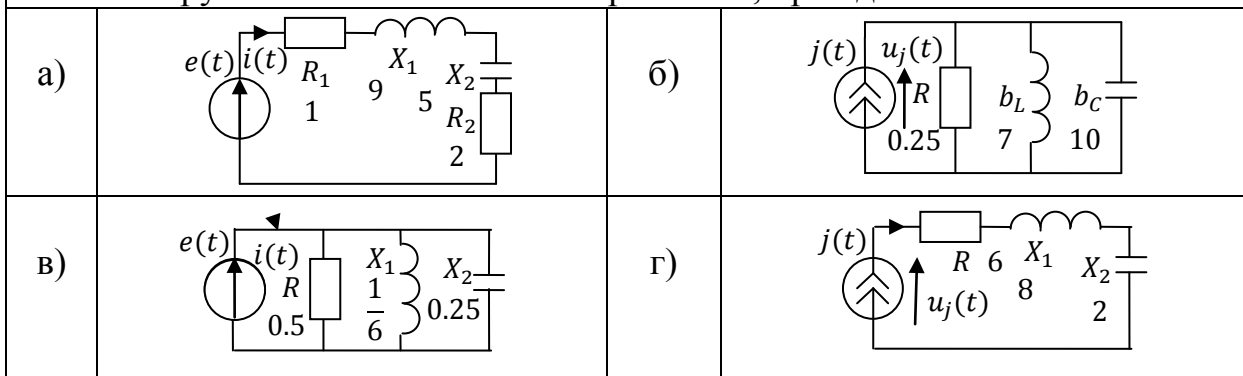


Рисунок 2.32

Відповідь: а)  $i(t) = 2 \cos(\omega t - 3.13^\circ) \text{ мА}$ ; б)  $j(t) = 15 \cos(\omega t + 100^\circ) \text{ мА}$ .

в)  $i(t) = 8 \cos(\omega t - 25^\circ) \text{ мА}$ ; г)  $j(t) = \sqrt{2} \cos(\omega t - 15^\circ) \text{ мА}$ .

**Задача 2.13.** У колі (рис. 2.33) визначити напруги на реактивних елементах  $u_L(t)$ ,  $u_C(t)$ . Відомо, що  $e(t) = 9\sqrt{2} \cos(\omega t - 10^\circ) \text{ В}$ . Якісно побудувати векторну діаграму струмів та напруг кола. Числові значення елементів такі:  $R = 3 \text{ кОм}$ ,  $X_L = 5 \text{ кОм}$ ,  $X_C = 8 \text{ кОм}$ .

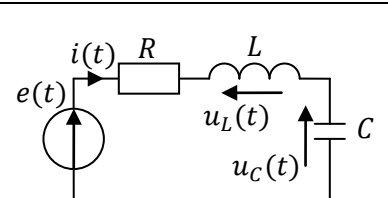
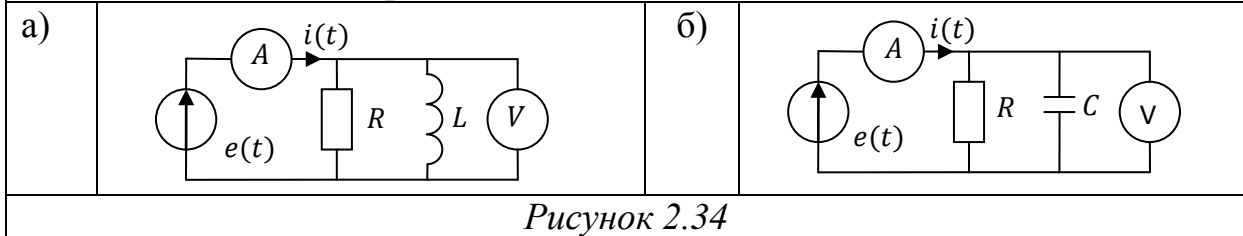


Рисунок 2.33

Відповідь:  $u_L(t) = 15 \cos(\omega t + 55^\circ) \text{ В}$ ,  $u_C(t) = 24 \cos(\omega t - 125^\circ) \text{ В}$ .

**Задача 2.14.** У колах (рис. 2.34) знайти напругу  $e(t)$  та показання вольтметра та амперметра. Струм на вході кола на частоті  $\omega = 10^6$  рад/с та числові значення елементів кіл: а)  $i(t) = 5\sqrt{2} \cos(\omega t + 10^\circ)$  мА,  $L = 1$  мГн,  $R = 1$  кОм (рис. 2.34 а); б)  $i(t) = 4\sqrt{2} \cos(\omega t + 10^\circ)$  мА,  $C = 1$  нФ,  $R = 1$  кОм (рис. 2.34 б).



Відповідь: а)  $V = 5/\sqrt{2}$  В,  $e(t) = 5 \cos(\omega t + 55^\circ)$  В,  $A = 5$  мА;

б)  $U_V = 2\sqrt{2}$  В,  $e(t) = 4 \cos(\omega t - 35^\circ)$  В,  $A = 4$  мА.

**Задача 2.15.** У колах (рис. 2.34 а, б) знайти струм  $i(t)$  та показання вольтметра та амперметра. Напруга джерела на частоті  $\omega = 10^6$  рад/с та числові значення елементів кола:  $e(t) = 10\sqrt{2} \cos(\omega t + 10^\circ)$  В,  $L = 1$  мГн,  $R = 1$  кОм,  $C = 1$  нФ.

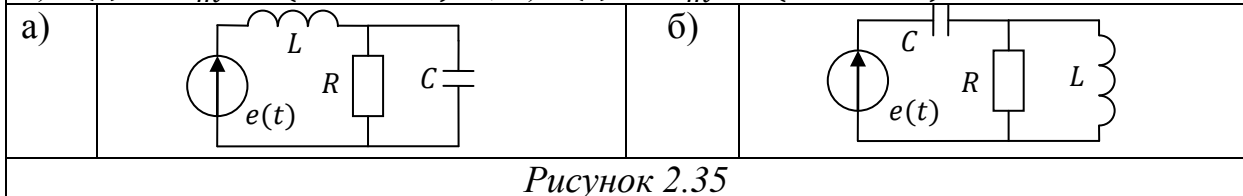
Відповідь: а)  $I_A = 10\sqrt{2}$  мА,  $U_V = 10$  В,  $i(t) = 20 \cos(\omega t - 35^\circ)$  мА;

б)  $I_A = 10\sqrt{2}$  мА,  $U_V = 10$  В,  $i(t) = 20 \cos(\omega t + 55^\circ)$  мА.

**Задача 2.16.** У колах (рис. 2.34) на частоті  $\omega = 10^6$  рад/с визначити показання амперметра та амплітуду напруги  $e(t)$ . Відомо, що у колі: а)  $L = 2$  мГн,  $R = 2$  кОм,  $I_R = I_L = 5$  мА, (рис. 2.34 а); б),  $C = 1$  нФ,  $R = 1$  кОм,  $I_R = I_C = 10$  мА (рис. 2.34 б).

Відповідь: а)  $I_A = 5$  мА,  $E_m = 10$  В; б)  $I_A = 10$  мА,  $E_m = 10$  В.

**Задача 2.17.** У колах (рис. 2.35) знайти вхідний опір та аргумент вхідного струму на частоті  $\omega = 10^6$  рад/с. Числові значення елементів кола:  $L = 1$  мГн,  $C = 1$  нФ,  $R = 1$  кОм. Відомо, що джерела мають значення: а)  $e(t) = E_m \cos(\omega t + 40^\circ)$  В; б)  $e(t) = E_m \cos(\omega t + 20^\circ)$  В.



Відповідь: а)  $Z_{BX} = e^{j45^\circ}/\sqrt{2}$  кОм,  $\varphi_I = -5^\circ$ ; б)  $Z_{BX} = e^{-j45^\circ}/\sqrt{2}$  кОм,  $\varphi_I = 65^\circ$ .



**Задача 2.18.** У колі (рис. 2.36) знайти діюче значення струму та струм у джерелі  $e(t)$  на частоті  $\omega = 10^6$  рад/с. Числові значення елементів кола:  $e(t) = 10\sqrt{2} \cos(\omega t)$  В,  $L$  в мГн,  $C$  в нФ,  $R$  в кОм.

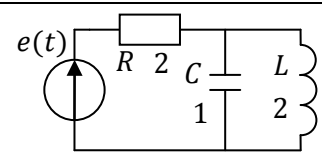


Рисунок 2.36

Відповідь:  $I_D = 5/\sqrt{2}$  мА,  $i(t) = 5 \cos(\omega t + 45^\circ)$  мА.

**Задача 2.19.** У колах (рис. 2.37) визначити гармонічні напруги на реактивних елементах на частоті  $\omega = 10^6$  рад/с. Числові значення елементів кола:  $j(t) = 4\sqrt{2} \cos(\omega t + 15^\circ)$  мА, опори в кОм.

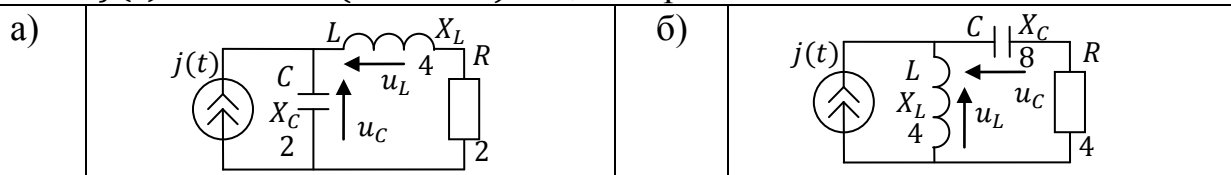


Рисунок 2.37

Відповідь: а)  $u_L(t) = 16 \cos(\omega t - 30^\circ)$  В,  $u_C(t) = 8\sqrt{5} \cos(\omega t - 56.5^\circ)$  В;  
б)  $u_L(t) = 16\sqrt{5} \cos(\omega t + 86.5^\circ)$  В,  $u_C(t) = 32 \cos(\omega t + 60^\circ)$  В.

**Задача 2.20.** У колі (рис. 2.38) при замкненому ключі зсув фаз між напругою та струмом становить: а)  $45^\circ$ ; б)  $60^\circ$ ; в)  $30^\circ$ . Визначити зсув фаз при розімкненому ключі, якщо частота струму при цьому не зміниться.

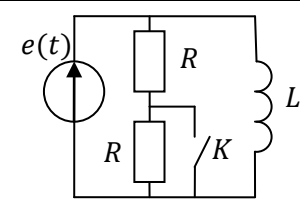


Рисунок 2.38

Відповідь:  $\varphi = 63.5^\circ$ ;  $\varphi = 73.8^\circ$ ;  $\varphi = 49^\circ$ .

## 2.2.4. Визначення елементів кола

**Задача 2.21.** Визначити індуктивність котушки, вважаючи, що її активний опір від частоти не залежить. Котушка індуктивності вмикається спочатку до джерела постійної напруги 100В, а потім до джерела гармонічної напруги 100 В з частотою 50 Гц. У першому випадку амперметр, підключений до котушки, показав струм 5А, а у другому – 2А.

Відповідь:  $L = 145$  мГн.

**Задача 2.22.** У колі (рис. 2.39) знайти значення  $L$  та показання третього вольтметра  $V_3$ . Показання двох вольтметрів:  $V_1 = 8$  В,  $V_2 = 18$  В. Числові значення:  $R = 4$  кОм,  $f = 50$  Гц.

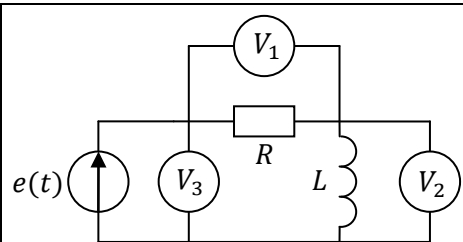


Рисунок 2.39

Відповідь:  $L = 29$  Гн,  $V_3 = 19.7$  В.

**Задача 2.23.** У колах (рис. 2.40) на частоті  $f = 50$  Гц визначити опір  $R$  та реактивність. Вольтметр, амперметр та ватметр дали такі показання: а)  $U = 65$  В,  $I = 5$  мА,  $P = 125$  мВт; б)  $U = 65$  В,  $I = 0.5$  мА,  $P = 12.5$  мВт.

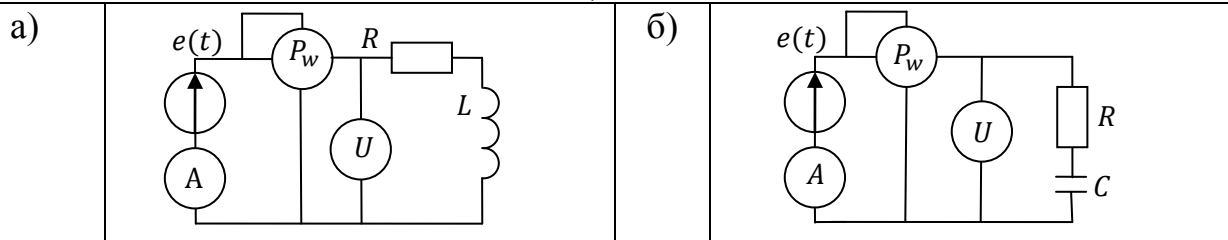


Рисунок 2.40

Відповідь: а)  $R = 5$  кОм,  $L = 38.2$  Гн; б)  $R = 50$  кОм,  $C = 26.54$  нФ.

**Задача 2.24.** У колі (рис. 2.41) в усталеному гармонічному режимі визначити  $R$  та  $X_C$ . Діючі значенні струму та напруги у джерелі  $E = 20$  В,  $I = 5$  мА, аргумент вхідного опору  $\varphi_{Z_{BX}} = -60^\circ$ .

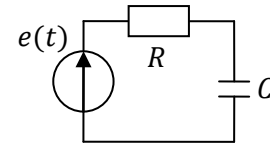


Рисунок 2.41

Відповідь:  $R = 2\sqrt{3}$  кОм,  $X_C = 2$  кОм.

**Задача 2.25.** У колах (рис. 2.42) в усталеному гармонічному режимі визначити  $Z_{BX}$  та  $Z_X$ . Опори та аргумент: а)  $X_C = R = 8$  кОм,  $\varphi_{Z_{BX}} = 45^\circ$ ; б)  $X_L = R = 4$  кОм,  $\varphi_{Z_{BX}} = -45^\circ$ ; в)  $X_C = R = 8$  кОм,  $\varphi_{Z_{BX}} = 0^\circ$ .

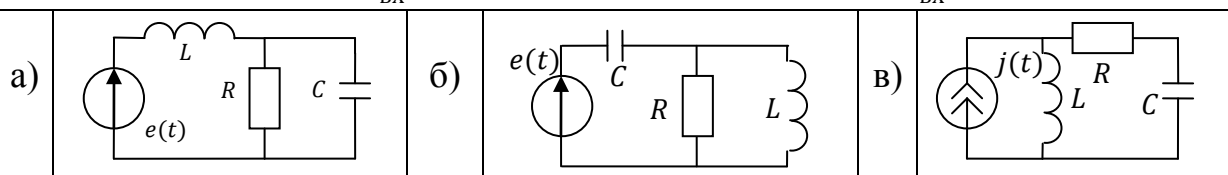


Рисунок 2.42

Відповідь: а)  $Z_L = 8j$  кОм,  $Z_{BX} = 4 + 4j$  кОм;  
 б)  $Z_C = -4j$  кОм,  $Z_{BX} = 2 - 2j$  кОм;  
 в)  $Z_L = 16j$  кОм,  $Z_{BX} = 16j$  кОм.

**Задача 2.26.** У колі (рис. 2.43) у гармонічному режимі визначити активну провідність  $G = 1/R$  та аргумент вхідної провідності  $\varphi_{Y_{BX}}$ . Абсолютні значення провідностей:  $|Y_L| = |Y_C| = G$ , модуль вхідної провідності  $|Y_{BX}| = 1$  мСім.

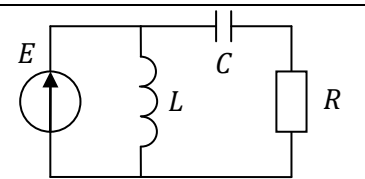


Рисунок 2.43

Відповідь:  $G = \sqrt{2}$  мСім,  $\varphi_{BX} = 45^\circ$ .

**Задача 2.27.** У колі (рис. 2.44) визначити величину ємності  $C_4$ , при якій струм у вольтметрі відсутній за умови балансу містка. Відомо, що  $Z_1 = 200$  Ом,  $Z_2 = 100$  Ом,  $Z_3 = -j120$  Ом. Частота змінного струму  $f = 50$  Гц.

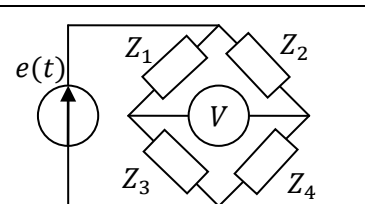


Рисунок 2.44

Відповідь:  $C = 53$  мкФ.

### 2.2.5. Потужність та добротність гілки

**Задача 2.28.** На вході пасивного двополюсника (рис. 2.45) вхідний опір на частоті  $\omega$  є  $Z_{\text{ВХ}} = 1 + j$  кОм, напруга  $u(t) = 20\sqrt{2} \cos(\omega t + 60^\circ)$  В. Визначити струм  $i(t)$  на вході цього двополюсника та активну і реактивну потужності.

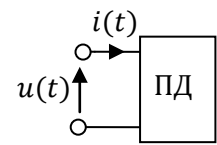


Рисунок 2.45

Відповідь: ,  $i(t) = 20 \cos(\omega t + 15^\circ)$  мА,  $P = 200$  мВт,  $Q = 200$  мВар.

**Задача 2.29.** У колах (рис. 2.46) визначити, таку величину  $L$  або  $C$ , щоб  $Q_L = P_R$  або  $Q_C = P_R$ . Визначити ці потужності. Відомо, що: а)  $e(t) = 4 \cos(\omega t + 10^\circ)$  В на частоті  $\omega = 10^3$  рад/с; б) струм на частоті  $\omega = 2 \cdot 10^6$  рад/с є  $i(t) = 8 \cos(\omega t + 65^\circ)$  В. Опори задані в кОм.

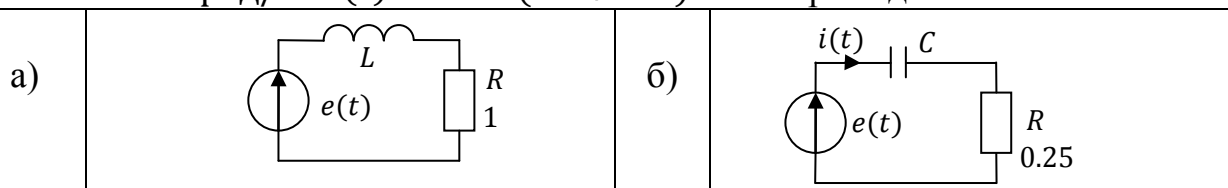


Рисунок 2.46

Відповідь: а)  $P = 4$  мВт,  $Q_L = 4$  мВар,  $L = 1$  Гн;  
 б)  $P = 8$  мВт,  $Q_C = -8$  мВар,  $C = 2$  нФ.

**Задача 2.30.** У колах (рис. 2.47) на відомій частоті  $\omega$  знайти  $R$  та  $X$ . Відомо, що діюче значення напруги, струму та добротності на цій частоті дорівнюють: а) 24 В та 4 мА,  $\sqrt{8}$  (рис. 2.47 а); б) 30 В та 5 мА,  $\sqrt{3}$  (рис. 2.47 а); в) 20 В, 5 мА, 4 (рис. 2.47 б); г) 10 В, 2 мА,  $\sqrt{24}$  (рис. 2.47 б).

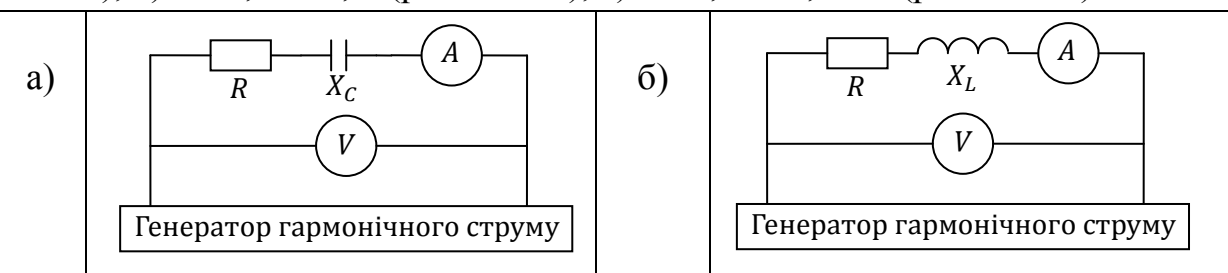


Рисунок 2.47

Відповідь: а)  $R = 2$  кОм,  $X_C = 4\sqrt{2}$  кОм; б)  $R = 3$  кОм,  $X_C = 3\sqrt{3}$  кОм;  
 в)  $R = 4/\sqrt{17}$  кОм,  $X_L = 16/\sqrt{17}$  кОм; г)  $R = 1$  кОм,  $X_L = 2\sqrt{6}$  кОм.

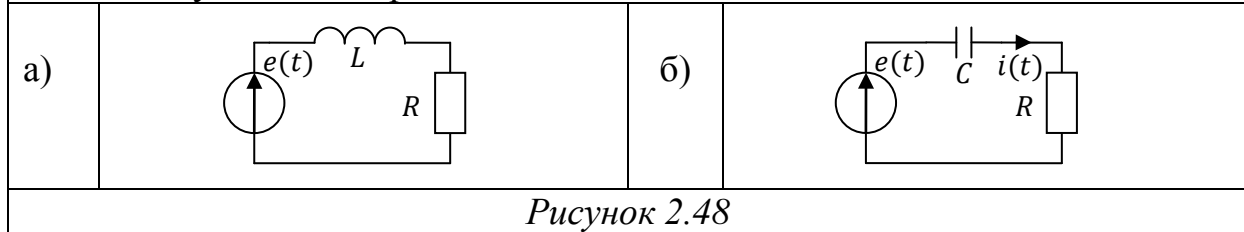
**Задача 2.31.** У колах (рис. 2.47) на відомій частоті  $\omega$  знайти  $X$  та коефіцієнт потужності. Вказати розмірності знайдених величин. На вході цього кола діюче значення напруги, струму та активний опір на цій частоті дорівнюють відповідно: а) 50 В, 10 мА, 3 кОм; б) 30 В, 6 мА, 4 кОм;

Відповідь: а)  $X_C = 4$  кОм,  $\cos \varphi = 0.6$ ; б)  $X_L = 3$  кОм,  $\cos \varphi = 0.8$ .

**Задача 2.32.** У колах (рис. 2.48) визначити частоту  $\omega$ , активний опір. Відомо, що:

а) добротність гілки  $Q_x = \sqrt{3}$ , модуль струму у колі  $\sqrt{5}$  мА, модуль повної потужності джерела 10 мВА, індуктивність 1 мГн;

б) добротність гілки  $Q_x = \sqrt{2}$ , модуль струму у колі  $\sqrt{7}$  мА, модуль повної потужності джерела  $21\sqrt{3}$  мВА, ємність  $\sqrt{2}$  нФ.



Відповідь: а)  $R = 1$  кОм,  $X_L = \sqrt{3}$  кОм,  $\omega = \sqrt{3}$  рад/мкс;

б)  $R = 3$  кОм,  $X_C = 3\sqrt{2}$  кОм,  $\omega = 1/6$  рад/мкс.

### 2.2.6. Паралельна та послідовна схеми заміщення

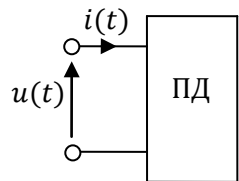
<p><b>Задача 2.33.</b> Накреслити послідовну та паралельну схеми заміщення пасивного двополюсника ПД (рис. 2.49) та визначити їх параметри на частоті <math>\omega = k \cdot 10^6</math> рад/с. Знайти активну, реактивну та модуль комплексної потужності. Визначити активну та реактивну складові струму та напруги на вході цього двополюсника, де напруга та струм є:</p>	
<p>а) <math>u(t) = 10 \cos(\omega t + 60^\circ)</math> В, <math>i(t) = 2 \cos(\omega t + 90^\circ)</math> мА, <math>k = 1</math>;          б) <math>u(t) = 10 \cos(\omega t + 55^\circ)</math> В, <math>i(t) = 20 \cos(\omega t + 10^\circ)</math> мА, <math>k = 1</math>;          в) <math>u(t) = 20 \cos(\omega t - 20^\circ)</math> В, <math>i(t) = 10 \cos(\omega t + 10^\circ)</math> мА, <math>k = 1</math>;          г) <math>u(t) = 8 \cos(\omega t + 40^\circ)</math> В, <math>i(t) = 4 \cos(\omega t - 20^\circ)</math> мА, <math>k = 2</math>.</p>	

Рисунок 2.49

Відповідь: а)  $Z_{BX} = 5e^{-j30^\circ}$  кОм,  $R = 2.5\sqrt{3}$  кОм,  $C = 0.4$  нФ,  
 $Y_{BX} = 0.2e^{j30^\circ}$  мСім,  $R = 10/\sqrt{3}$  кОм,  $C = 0.1$  нФ;  $|S| = 10$  мВА,  
 $P = 5\sqrt{32}$  мВт,  $Q = -5$  мВар,  $U_A = 5\sqrt{3}$  В,  $U_P = 5$  В,  $I_A = \sqrt{3}$  мА,  $I_P = 1$  мА;  
 б)  $Z_{BX} = 0.5e^{-j45^\circ}$  кОм,  $R = \sqrt{2}$  кОм,  $L = \sqrt{2}$  мГн,  $Y_{BX} = 2e^{-j45^\circ}$  мСім,  
 $R = 1/\sqrt{2}$  кОм,  $L = 1/\sqrt{2}$  мГн;  $|S| = 100$  мВА,  $P = 50\sqrt{2}$  мВт,  $Q = 50\sqrt{2}$  мВар,  
 $I_A = 10\sqrt{2}$  мА,  $I_P = 10\sqrt{2}$  мА,  $U_A = 10\sqrt{2}$  В,  $U_P = 10\sqrt{2}$  В;  
 в)  $Z_{BX} = 2e^{j30^\circ}$  кОм,  $R = 0.43$  кОм,  $C = 4$  нФ,  $Y_{BX} = 0.5e^{-j30^\circ}$  мСім,  
 $R = 1/\sqrt{3}$  кОм,  $C = 1$  нФ;  $|S| = 100$  мВА,  $P = 50\sqrt{3}$  мВт,  $Q = -50$  мВар,  
 $I_A = 5\sqrt{3}$  мА,  $I_P = 5$  мА,  $U_A = 10\sqrt{3}$  В,  $U_P = 10$  В;  
 г)  $Z_{BX} = 2e^{j60^\circ}$  кОм,  $R = 1$  кОм,  $L = 0.5\sqrt{3}$  мГн,  $Y_{BX} = 0.5e^{-j60^\circ}$  мСім,  
 $R = 4$  кОм,  $L = 2/\sqrt{3}$  мГн;  $|S| = 16$  мВА,  $P = 8$  мВт,  $Q = 8\sqrt{3}$  мВар,  
 $I_A = 2$  мА,  $I_P = 2\sqrt{3}$  мА,  $U_A = 4$  В,  $U_P = 4\sqrt{3}$  В.

**Задача 2.34.** Визначити струм  $i(t)$  на вході пасивного двополюсника (рис. 2.49). Накреслити схему заміщення на частоті  $\omega = 10^6$  рад/с із зазначенням числових значень елементів. Визначити активну, реактивну та модуль комплексної потужності. На вході двополюсника опір (провідність) та напруга складають:

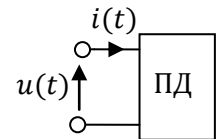


Рисунок 2.50

- а)  $Z_{BX} = 1 - j$  кОм,  $u(t) = 4\sqrt{2} \cos(\omega t + 60^\circ)$  В, паралельну;  
 б)  $Z_{BX} = 1 + j$  кОм,  $u(t) = 10\sqrt{2} \cos(\omega t + 60^\circ)$  В, паралельну;  
 в)  $Y_{BX} = 0.5 + 0.5j$  мСім,  $u(t) = 16 \cos(\omega t + 10^\circ)$  В, послідовну.

Відповідь: а)  $i(t) = 10 \cos(\omega t + 15^\circ)$  мА,  $R = 2$  кОм,  $C = 0.5$  нФ,

$P = 8$  мВт,  $Q = -8$  мВар,  $|S| = 8\sqrt{2}$  мВА;

б)  $i(t) = 10 \cos(\omega t + 15^\circ)$  мА,  $R = 2$  кОм,  $L = 2$  мГн,  $P = 50$  мВт,  
 $Q = 50$  мВар,  $|S| = 50\sqrt{2}$  мВА;

в)  $i(t) = 10\sqrt{2} \cos(\omega t + 55^\circ)$  мА,  $R = 1$  кОм,  $C = 1$  нФ,  
 $P = 64$  мВт,  $Q = -64$  мВар,  $|S| = 64\sqrt{2}$  мВА.

**Задача 2.35.** Визначити напругу  $u(t)$  на вході пасивного двополюсника (рис. 2.50). Накреслити паралельну схему заміщення пасивного двополюсника на частоті  $\omega = 10^6$  рад/с. На вході цього двополюсника опір та струм на цій частоті становлять:  $Z_{BX} = 2 + 2j$  кОм,  $i(t) = 4\sqrt{2} \cos(\omega t + 30^\circ)$  мА. Визначити активну, реактивну та модуль комплексної потужності.

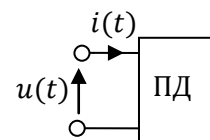


Рисунок 2.51

Відповідь:  $R = 4$  кОм,  $L = 4$  мГн,  $u(t) = 16 \cos(\omega t + 75^\circ)$  В,

$P = 32$  мВт,  $Q = 32$  мВар,  $|S| = 32\sqrt{2}$  мВА.

## 2.2.7. Метод еквівалентного генератора

**Задача 2.36.** У колі (рис. 2.52) визначити максимальну активну потужність у навантаженні.

- а) Яким повинне бути  $Z_\Gamma$ , щоб в опорі  $R_H$  була отримана максимальна активна потужність. Числові значення:  $R_H = 2$  кОм,  $L_H = 1$  мГн,  $\omega = 10^6$  рад/с,  $e(t) = 4\sqrt{2} \cos(\omega t + 110^\circ)$  В;

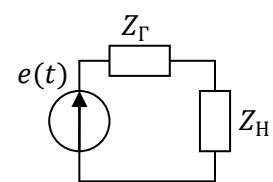


Рисунок 2.52

- б) Яким повинен бути опір  $Z_H$ , щоб на ньому була виділена максимальна активна потужність. Числові значення елементів:  $Z_\Gamma = 4 - j$ , кОм, робоча частота  $\omega = 10^6$  рад/с,  $e(t) = 8\sqrt{2} \cos(\omega t + 25^\circ)$ , В.

Відповідь: а)  $Z_\Gamma = 0 - j$  кОм,  $P_{max} = 8$  мВт;

б)  $Z_H = 4 + j$  кОм,  $P_{max} = 4$  мВт.

**Задача 2.37.** У колах (рис. 2.53) визначити при яких значеннях елементів буде отримана максимальна активна потужність  $P_{max}$  у навантаження? Знайти цю потужність. Робоча частота є  $\omega = 10^6$  рад/с. Відомо, що на цій частоті опір та напруга є: а)  $Z_{\Gamma} = 2 + j$  кОм,  $e(t) = 6\sqrt{2} \cos(\omega t + 15^\circ)$  В; б)  $Z_{\Gamma} = 4 - 2j$  кОм,  $e(t) = 4\sqrt{2} \cos(\omega t + 25^\circ)$  В.

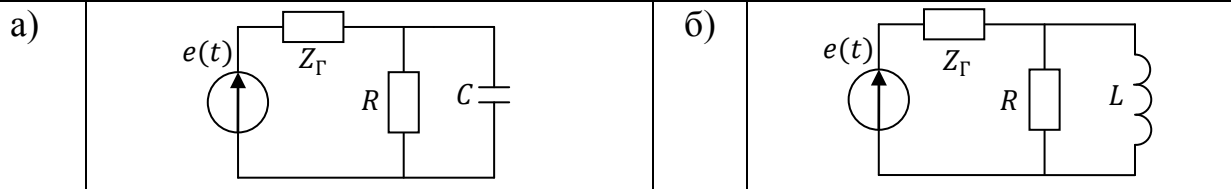


Рисунок 2.53

Відповідь: а)  $R = 2.5$  кОм,  $C = 0.2$  нФ,  $P_{max} = 4.5$  мВт;

б)  $R = 5$  кОм,  $L = 10$  мГн,  $P_{max} = 1$  мВт.

**Задача 2.38.** У колах (рис. 2.54) визначити опір генератора  $Z_{\Gamma}$ , при якому виділиться активна максимальна потужність  $P_{max}$  у навантаженні та обчислити її. Числові значення елементів:  $R = 2$  кОм,  $X_C = 2$  кОм,  $X_L = 2$  кОм, амплітуда напруги джерела  $E_m = 4\sqrt{2}$  В.

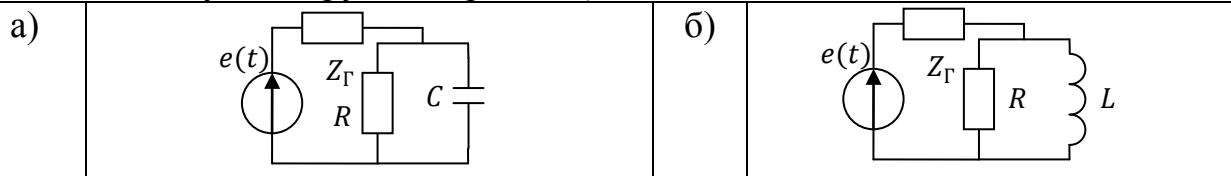


Рисунок 2.54

Відповідь: а)  $Z_{\Gamma} = 0 + j$  кОм,  $P_{max} = 16$  мВт;

б)  $Z_{\Gamma} = 0 - j$  кОм,  $P_{max} = 16$  мВт.

**Задача 2.39.** У колах (рис. 2.55) визначити при якому опорі генератора  $Z_{\Gamma}$  він буде віддавати максимальну активну потужність  $P_{max}$ ? Знайти цю потужність. Відомо, що напруга джерел є  $e(t) = 8\sqrt{2} \cos(\omega t + 25^\circ)$  В. Числові значення опорів на схемі наведені в кОм.

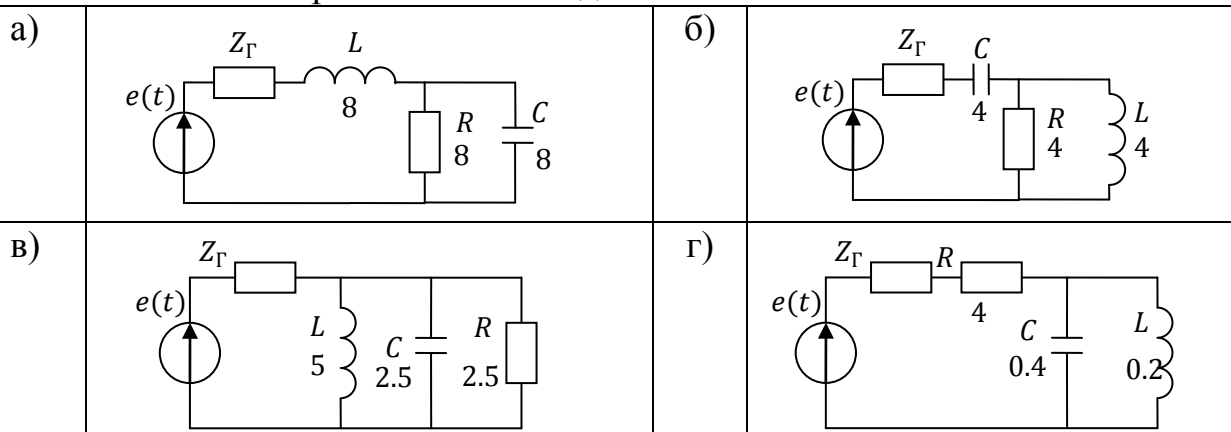


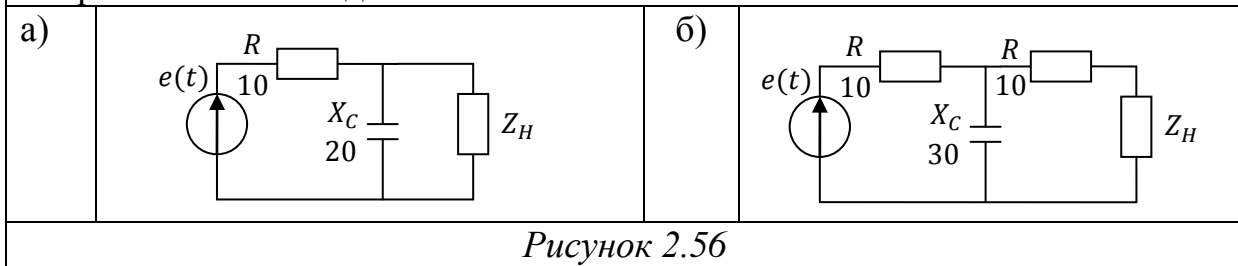
Рисунок 2.55

Відповідь: а)  $Z_{\Gamma} = 0 - 4j$  кОм,  $P_{max} = 16$  мВт;

б)  $Z_{\Gamma} = 0 + 2j$  кОм,  $P_{max} = 32$  мВт;

в)  $Z_{\Gamma} = 0 + j$  кОм,  $P_{max} = 32$  мВт; г)  $Z_{\Gamma} = 0 - 0.4j$  кОм,  $P_{max} = 16$  мВт.

**Задача 2.40.** У колах (рис. 2.56) визначити при якому опорі навантаження  $Z_H$  на ньому виділиться максимальна потужність та обчислити її. Діюча напруга джерел у колах становлять  $E_d = 80$  В. Числові значення опорів на схемі наведені в кОм.

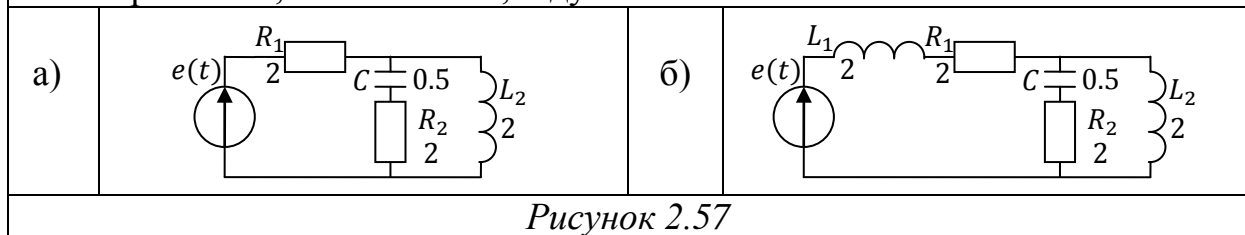


Відповідь: а)  $Z_H = 8 + 4j$  кОм,  $P_{max} = 159.3$  мВт;

б)  $Z_H = 19 + 3j$  кОм,  $P_{max} = 76$  мВт.

### 2.2.8. Складні кола

**Задача 2.41.** У колах (рис. 2.57) визначити гармонічні струми у гілках на частоті  $\omega = 10^6$  рад/с: Числові значення елементів кола такі: опори в кОм, ємності в нФ, індуктивності в мГн. Джерело напруги має значення  $e(t) = 10\sqrt{2} \cos(\omega t + 90^\circ)$  В. Числові значення елементів на схемі наведені: опори в кОм, ємності в нФ, індуктивності в мГн.



Відповідь: а)  $i_C(t) = \sqrt{10} \cos(\omega t + 153^\circ)$ ,  $i_L(t) = 2\sqrt{5} \cos(\omega t + 18^\circ)$  мА,

$i_1(t) = \sqrt{10} \cos(\omega t + 63^\circ)$  мА; б)  $i_1(t) = 2.5 \cos(\omega t + 45^\circ)$  мА,

$i_2(t) = 2.5 \cos(\omega t + 135^\circ)$  мА,  $i_3(t) = 2.5\sqrt{2} \cos(\omega t)$  мА.

**Задача 2.42.** У колі (рис. 2.58) визначити струм  $i_3(t)$ . Гармонічна напруга джерела  $e(t) = 6\sqrt{2} \cos(\omega t + 75^\circ)$  В. Числові значення елементів такі: а)  $R_1 = 2$  кОм,  $R_2 = 5$  кОм,  $R_3 = 1$  кОм,  $X_{C2} = 2.5$  кОм,  $X_{L2} = 1.25$  кОм,  $X_{L1} = X_{C1} = 4$  кОм; б)  $R_1 = 0.5$  кОм,  $R_2 = 0.1$  кОм,  $R_3 = 0.1$  кОм,  $X_{C1} = 0.15$  кОм,  $X_{L1} = 0.4$  кОм  $X_{L1} = X_{C1} = 2$  кОм.

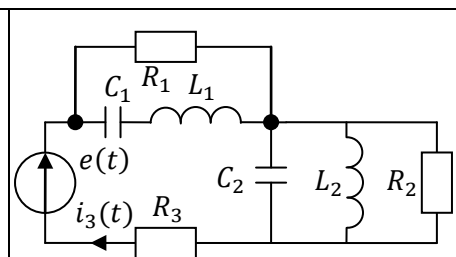


Рисунок 2.58

Відповідь: а)  $i_3(t) = 3 \cos(\omega t + 30^\circ)$  мА;

б)  $i_3(t) = 30 \cos(\omega t + 30^\circ)$  мА.

**Задача 2.43.** У колі (рис. 2.59) знайти покази приладів в усталеному гармонічному режимі. Значення струму  $j(t) = 2\sqrt{2} \cos(\omega t + 110^\circ)$  мА. Відомо, що: а) абсолютні значення опорів всіх реактивних елементів дорівнюють 0.5 кОм, а активних 1 кОм; б) активні опори становлять 1.5 кОм, реактивні  $X_{L2}=6$  кОм,  $X_{L1} = X_{C1} = X_{C2} = 2$  кОм.

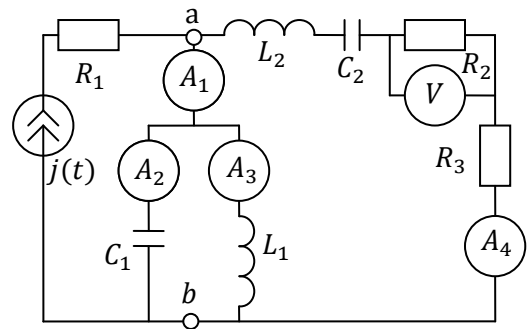


Рисунок 2.59

Відповідь: а)  $I_{A1} = 0$ ,  $I_{A2} = 8$  мА,  $I_{A3} = 8$  мА,  $I_{A4} = 2$  мА,  $U_V = 2$  В;

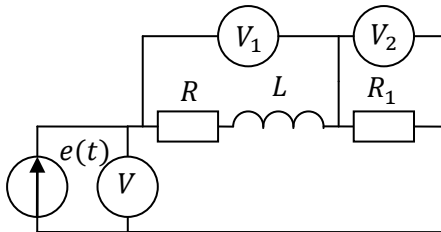
б)  $I_{A1} = 0$ ,  $I_{A2} = 5$  мА,  $I_{A3} = 5$  мА,  $I_{A4} = 2$  мА,  $U_V = 3$  В.

**Задача 2.44.** У колах (рис. 2.60) визначити:

а) потужність  $P_R$  на опорі  $R$ , якщо показання вольтметрів:  $V = 120$  В,  $V_1 = 60$  В,  $V_2 = 80$  В, значення  $R_1 = 20$  кОм.

б) опори  $R$ ,  $X_C$ , якщо показання вольтметрів:  $V = 52$  В,  $V_1 = 30$  В,  $V_2 = 40$  В, потужність на активному опорі  $P_R = 0.638$  мВт.

а)



б)

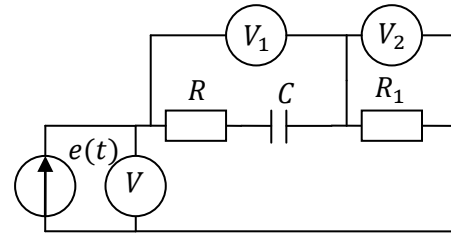


Рисунок 2.60

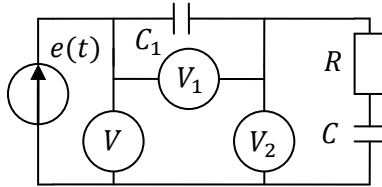
Відповідь: а)  $P = 110$  мВт ; б)  $R = 10.2$  кОм,  $X_C = 120$  кОм.

**Задача 2.45.** У колах (рис. 2.61) визначити на частоті  $f = 50$  Гц значення елементів. Вольтметри показують:

а)  $V = 100$  В,  $V_1 = 55$  В,  $V_2 = 65$  В, ємність  $C_1 = 57.87$  нФ;

б)  $V = 100$  В,  $V_1 = 80$  В,  $V_2 = 52$  В, опір  $R_1 = 100$  кОм.

а)



б)

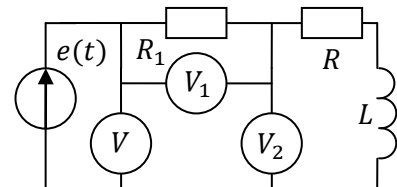


Рисунок 2.61

Відповідь: а)  $R = 60$  кОм,  $C = 127.3$  нФ; б)  $R = 7$  кОм,  $L = 206$  мГн.



**Задача 2.46.** Коло  $Z$  (рис. 2.62) не містить джерел. Матриця опорів для метода контурних струмів схеми симетрична відносно головної діагоналі. Напруги  $e_1(t)$  та  $e_2(t)$  є гармонічними функціями однієї частоти. Якщо  $\dot{E}_1 = 30e^{j45^\circ} \text{ В}$ , а  $\dot{E}_2 = 0$ , то  $\dot{I}_2 = 34e^{j93^\circ} \text{ мА}$ . Чому буде дорівнювати струм  $\dot{I}_1$ , якщо  $\dot{E}_1 = 0$ , а  $\dot{E}_2 = 60e^{j60^\circ} \text{ В}$ .

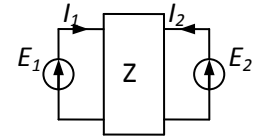


Рисунок 2.62

Відповідь:  $\dot{I}_1 = 68e^{j108^\circ} \text{ мА}$ .

### 2.2.9. Кола із взаємодукцією

**Задача 2.47.** У колі (рис. 2.63) визначити  $u_{ab}(t)$  при узгодженому та неузгодженому напрямку струмів  $j_1(t) = \sqrt{2} \cos(\omega t) \text{ мА}$  та  $j_2(t) = 10\sqrt{2} \cos(\omega t + 90^\circ) \text{ мА}$  на частоті  $\omega = 10^6 \text{ рад/с}$ . Числові значення елементів: опори – кОм, індуктивності – мГн, струм – мА.

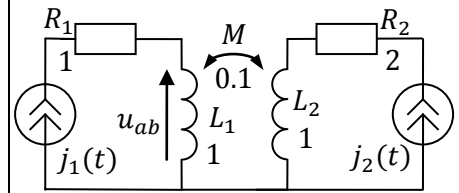


Рисунок 2.63

Відповідь:  $u_{ab1}(t) = 2 \cos(\omega t + 135^\circ) \text{ В}$ ;  $u_{ab2}(t) = 2 \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ В}$ .

**Задача 2.48.** У колі (рис. 2.64) знайти зсув фаз між напругою та струмом на частоті  $\omega_0 = 10^6 \text{ рад/с}$ . Числові значення елементів:  $L_1 = 2 \text{ мГн}$ ,  $L_2 = 3 \text{ мГн}$ ,  $C = 0.25 \text{ нФ}$ ,  $R = 5 \text{ кОм}$ ,  $M = 2 \text{ мГн}$ .

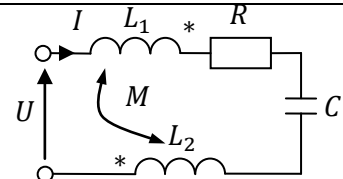


Рисунок 2.64

Відповідь:  $\varphi = 45^\circ$ .

**Задача 2.49.** У колі (рис. 2.65) із однаковими котушками знайти  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $M$ ,  $k$ . Споживана активна потужність  $P_1 = 80 \text{ Вт}$ . Амплітуди напруги та струми:  $U_{m1} = 100 \text{ В}$ ,  $I_{m1} = 4 \text{ А}$ ,  $U_{m2} = 80 \text{ В}$ ,  $I_{m2} = 0$ . Частота джерела напруги  $f = 50 \text{ Гц}$ .

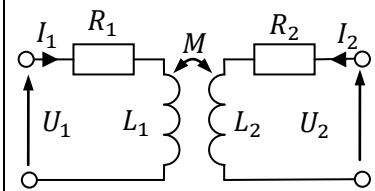


Рисунок 2.65

Відповідь:  $L_1 = 73 \text{ мГн}$ ,  $L_2 = 73 \text{ мГн}$ ,  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2$  – будь-яке,  $M = 64 \text{ мГн}$ ,  $k = 0.877$ .

**Задача 2.50.** У колі (рис. 2.66) знайти вхідний опір кола та записати систему рівнянь на основі методу контурних струмів. Замінити магнітні зв'язки керованими джерелами. Записати систему рівнянь.

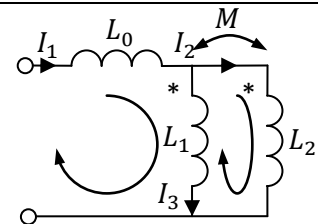
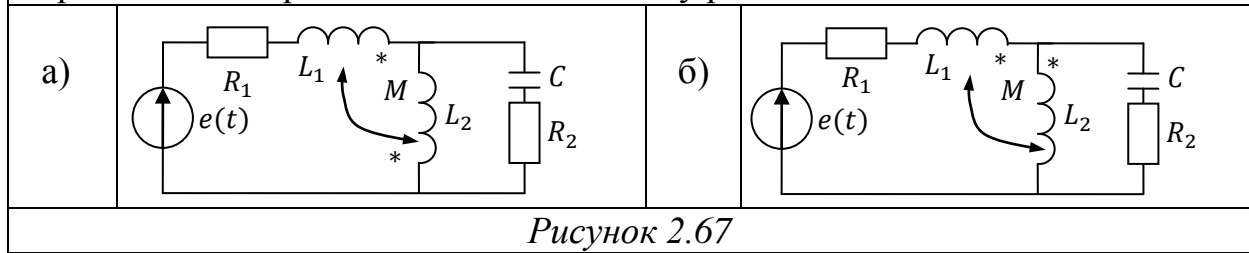


Рисунок 2.66

Відповідь:  $Z_{\text{ВХ}} = \frac{(Z_{L0} + Z_{L1})(Z_{L1} + Z_{L2} - 2Z_M) - (Z_M - Z_{L1})^2}{Z_{L1} + Z_{L2} - 2Z_M}$ .

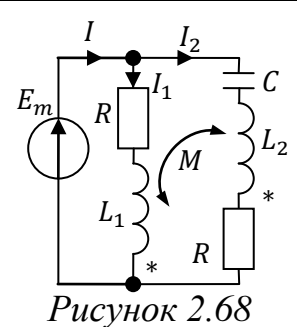
**Задача 2.51.** Знайти вхідний опір кола (рис. 2.67) та записати систему рівнянь на основі методу контурних струмів. Замінити магнітні зв'язки керованими джерелами. Записати систему рівнянь.



Відповідь: а)  $Z_{\text{ВХ.УЗГОД}} = \frac{(Z_{L2} + Z_{L1} + R_1 + 2Z_M)(Z_{L2} + Z_C + R_2) - (Z_M + Z_{L1})^2}{Z_{L2} + Z_C + R_2}$ ;

б)  $Z_{\text{ВХ.НЕУЗГОД}} = \frac{(Z_{L2} + Z_{L1} + R_1 - 2Z_M)(Z_{L2} + Z_C + R_2) - (Z_{L2} - Z_M)^2}{Z_{L2} + Z_C + R_2}$ .

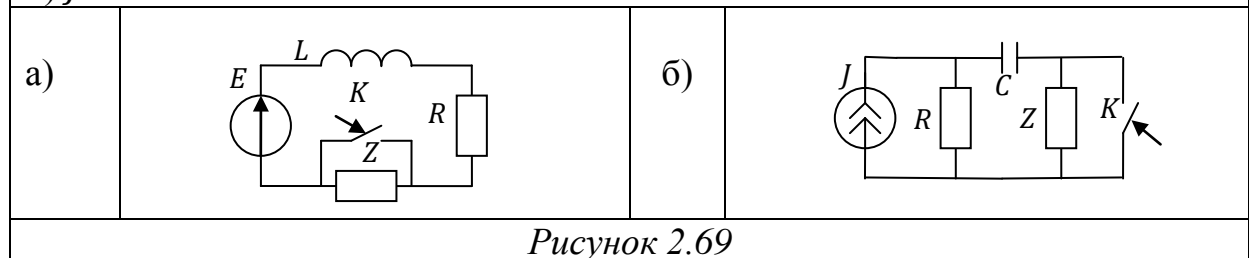
**Задача 2.52.** Розрахувати діючі значення струмів у гілках кола (рис. 2.68), потужність, що передається з однієї гілки в іншу за рахунок індуктивного зв'язку між ними. Визначити повний комплексний струм у, що втікає у коло. До кола прикладена гармонічна напруга з діючим значенням  $E = 6$  В. На частоті прикладеної напруги опори є:  $X_M = 2X_{L1}$ ,  $X_{L1} = X_{L2} = X_C = 2$  кОм,  $R = 2$  кОм.



Відповідь:  $I_1 = 0.95$  мА,  $I_2 = 1.34$  мА;  $i = 0.9 - 2.1j$ ;  $Q_{M1} = 7.2$  мВар,  $Q_{M2} = 3.6$  мВар.

### 2.2.10. Олімпіадні задачі

**Задача 2.53.** У колі (рис. 2.69) визначити величини опору  $R$ ,  $Z_L$ ,  $Z_C$  та  $Z$ . При замкненому ключі  $K$  потужність джерела: а)  $\dot{S}_E = 50 + 350j$  мВА; б)  $\dot{S}_J = 300 - 300j$  мВА, а при розімкненому: а)  $\dot{S}_E = 1250$  мВА; б)  $\dot{S}_J = 200$  мВА. Діюче значення напруги джерела: а)  $E = 50$  В; б)  $J = 10$  мА.



Відповідь: а)  $R = 1$  кОм,  $Z_L = 7j$  кОм,  $Z = 1 - 7j$  кОм;

б)  $R = 6$  кОм,  $Z_C = -6j$  кОм,  $Z = 3 + 6j$  кОм.

**Задача 2.54\*.** У колі (рис. 2.70) визначити  $R$ ,  $Z_C$  та  $Z$ . Потужності на активних елементах:  $P_1 = P_2 = 8$  мВт, напруга  $u_1 = 4$  В. Числові значення:  $J = 4$  мА,  $X_L = 2$  кОм.

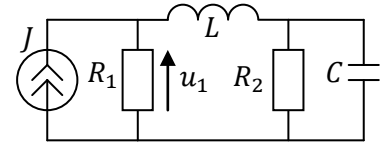


Рисунок 2.70

Відповідь:  $R_1 = 2$  кОм,  $R_2 = 4$  кОм,  $Z_C = -4j$  кОм.

**Задача 2.55\*.** У колі (рис. 2.71) визначити:  $Z_C$ ,  $Z_L$ ,  $R_1$  та  $R_2$ . Відомо, що активна потужність  $P_1 = P_2 = 10$  мВт, діючі значення напруг визначаються  $E = u_C = 5$  В.

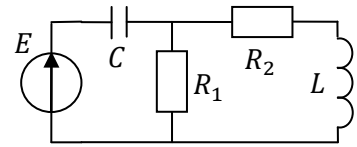


Рисунок 2.71

Відповідь:  $Z_C = -1.25j$ ,  $Z_L = 2j$ ,  $R_1 = 5$  та  $R_2 = 1$  кОм.

**Задача 2.56\*.** Повні опори двох послідовно з'єднаних індуктивно зв'язаних котушок з параметрами ( $R_1 = R_2 = R$  та  $C_1 = C_2 = C$ ) на частоті  $f = 1$  МГц дорівнюють при узгодженому ввімкненні  $Z_{узг} = 1.414$  кОм, а при зустрічному  $Z_{зус} = 1$  кОм. Коефіцієнт зв'язку  $k = 0.5$ . Знайти активний опори, індуктивність кожної котушки, величину їх взаємодукції  $M$ .

Відповідь:  $R = 468$  Ом,  $L = 56.27$  мкГн.

**Задача 2.57\*.** У колі (рис. 2.72) визначити за якої умови струм у колі  $I$  не залежить від значення активного опору  $r$ . Визначити цей струм. При виведенні можна вважати, що діюче значення напруги джерела напруги становить 1 В.

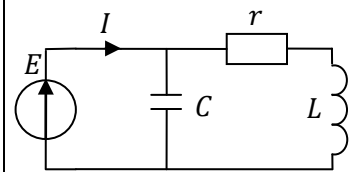


Рисунок 2.72

Відповідь:  $\omega = 1/\sqrt{2LC}$ ,  $I = \sqrt{C/(2L)}$ .

**Задача 2.58.** У колі (рис. 2.73) визначити напруги  $u_L$  та  $u_C$  на частоті  $f_1$ . Відомо, що діюче значення напруг на частотах  $f_1$  та  $4f_1$  в джерелі  $E = 15$  В,  $u_R = 9$  В.

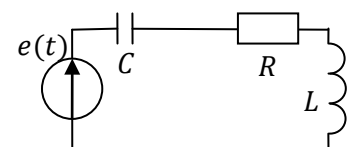


Рисунок 2.73

Відповідь:  $u_L = 4$  В,  $u_C = 16$  В.

**Задача 2.59.** У колі (рис. 2.74) визначити опори  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $Z_L$ . Відомо, що діюче значення струму в джерелі  $J = 4$  мА, діючі значення напруги на опорі  $u_{R1} = 4$  В, опір  $X_L = 2$  кОм, активні потужності становлять  $P_{R1} = P_{R2} = 8$  мВт.

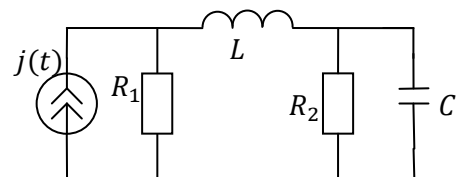


Рисунок 2.74

Відповідь:  $R_1 = 2$  кОм,  $R_2 = 4$  кОм,  $Z_L = 4j$  кОм.

**Задача 2.60.** У колі (рис. 2.75) визначити опори  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $Z_L$ ,  $Z_C$ . Відомо, що діюче значення струму  $I_C = 4$  мА, діючі значення напруги на опорі  $u_{R1} = u_{R2} = 12$  В, активна та реактивна потужності складають відповідно  $P_R = 84$  мВт,  $Q_L = 36$  мВТ.

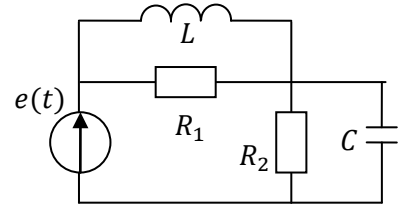


Рисунок 2.75

Відповідь:  $R_1 = 3$  кОм,  $R_2 = 4$  кОм,  $Z_L = 4j$  кОм,  $Z_C = -3j$  кОм.

**Задача 2.61.** У колі (рис. 2.76) визначити:  $Z_C$ ,  $Z_{L2}$ ,  $R$ . Відомо, що діючі значення струмів  $\epsilon J = 5$  мА,  $I_R = 3$  мА, реактивні потужності  $Q_{L1} = 96$  мВар,  $Q_{L2} = 64$  мВар, опір індуктивності  $|Z_{L1}| = 6$  кОм.

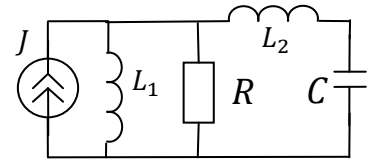


Рисунок 2.76

Відповідь:  $R = 8$  кОм,  $Z_{L2} = j$  кОм,  $Z_C = -j4$  кОм.

**Задача 2.62.** У колі (рис. 2.77) визначити опори  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $Z_L$ ,  $Z_{C1}$ ,  $Z_{C2}$ . Відомо, що діюче значення напруги джерела  $E = 4.5\sqrt{2}$  мВ, активні  $P_{R1} = 32$  мВт,  $P_{R2} = 4$  мВт, та реактивні потужності  $Q_L = 64$  мВар,  $Q_{C1} = -25$  мВар,  $Q_{C2} = -3$  мВар.

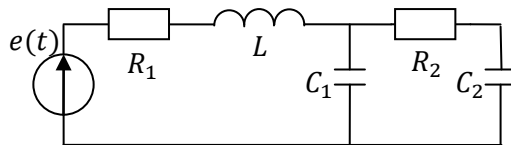


Рисунок 2.77

Відповідь:  $R_1 = 0.5$  кОм,  $R_2 = 2$  кОм,  $Z_L = j$  кОм,  $Z_{C1} = -0.5j$  кОм,  $Z_{C2} = -1.5j$  кОм.

**Задача 2.63.** У колі (рис. 2.78) визначити опір  $R_2$ . Відомо, що діючі значення напруг:  $E = 8$  В,  $u_{R1} = 4$  В; опори  $\epsilon X_{C2} = 8$  кОм,  $R_1 = 4$  кОм; потужності:  $Q = -8$  мВар,  $P_{R1} = 4$  мВт.

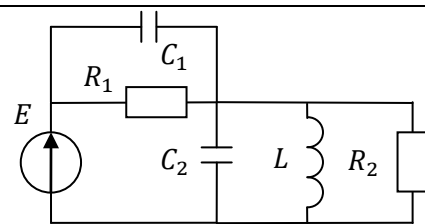


Рисунок 2.78

Відповідь:  $R_2 = 2.4$  кОм.

**Задача 2.64.** У колі (рис. 2.79) визначити опори  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $Z_L$ . Відомо, що реактивна потужність  $Q_L = 50$  мВар, опір  $X_C = 4$  кОм, напруги становлять:  $e(t) = 20\sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ)$  мА,  $u_L(t) = 10\sqrt{2} \cos(10t + 135^\circ)$  мА.

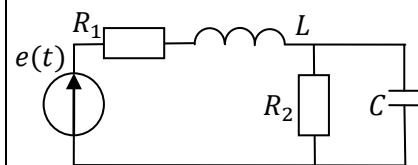


Рисунок 2.79

Відповідь:  $R_1 = 2$  кОм,  $R_2 = 4$  кОм,  $Z_L = 2j$  кОм.

### 3. КОЛИВАЛЬНІ КОНТУРИ

#### 3.1 Короткі теоретичні відомості

**Резонанс** – це явище багатократного збільшення амплітуди системи, коли частота дії співпадає із власною частотою системи.

Розрізняють резонанс напруг, що спостерігається у контурі послідовного живлення (рис. 3.1 а) та резонанс струмів, що спостерігається у контурі паралельного живлення (рис. 3.1 б).

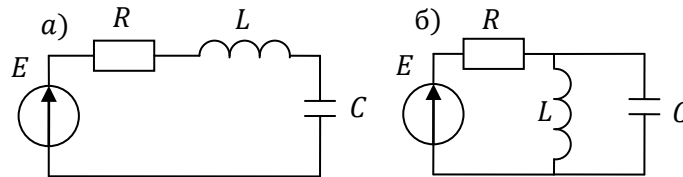


Рисунок 3.1

Резонансна частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

Характеристичний опір

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{X_L \cdot X_C}.$$

Абсолютна розстройка

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0.$$

Відносна розстройка

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

Узагальнена розстройка

$$\xi = \frac{X}{R} \cong 2Q\delta = 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

Вхідний опір послідовного контуру

$$Z_{ВХ.ПОСЛ.} = r + jX = r(1 + j\xi) = r\sqrt{1 + \xi^2} e^{j \arctg \xi}.$$

АЧХ та ФЧХ вхідного опору послідовного контуру (рис. 3.2).

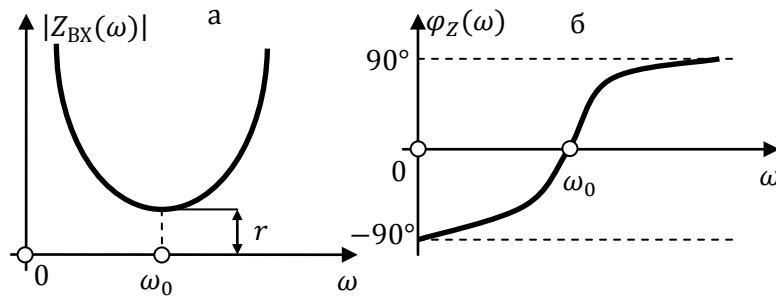


Рисунок 3.2

Добротність для послідовного контуру

$$Q = \frac{U_C}{U_R} = \frac{U_L}{U_R} = \frac{X}{R} = \frac{\rho}{R}.$$

Смуга пропускання – це діапазон зміни частоти, у якому АЧХ резонансної кривої не опускається нижче максимального значення, поділеного на  $\sqrt{2}$  (рис. 3.3 а).

$$\Pi = \frac{\omega_0}{Q} = 2\Delta\omega.$$

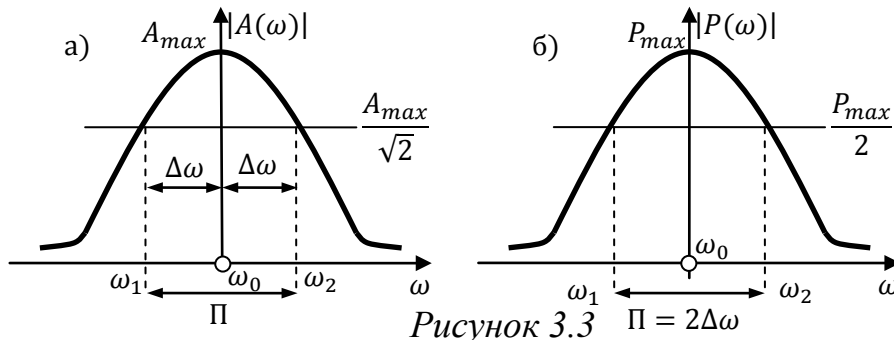


Рисунок 3.3

**Смуга пропускання** по потужності – це діапазон зміни частоти, у якому АЧХ резонансної кривої потужності  $P(\omega)$  не опускається нижче максимального значення, поділеного на 2 (рис. 3.3 б).

Вхідний опір паралельного контуру першого виду

$$Z_{BX,ПАР.} = \frac{R_E}{1 + j\xi} = \frac{R_E}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{j \arctg \xi} = \frac{Q \cdot \rho}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{-j \arctg \xi}.$$

Добротність для паралельного контуру

$$Q = \frac{I_C}{J} = \frac{I_L}{J} = \frac{R}{\rho}.$$

АЧХ та ФЧХ вхідного опору паралельного контуру (рис. 3.4).

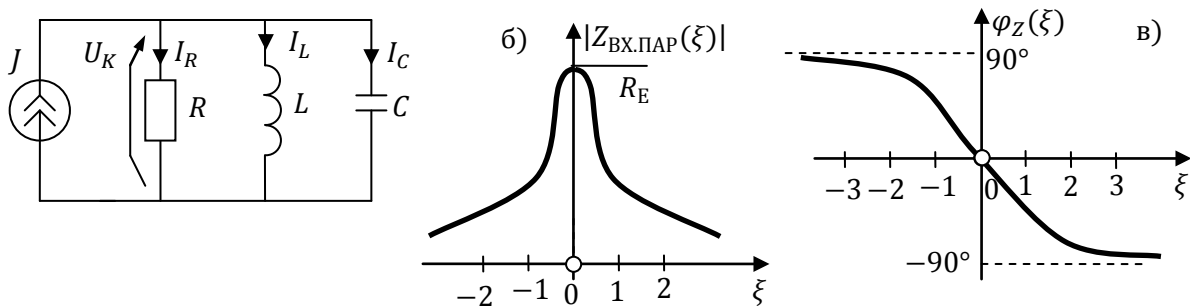


Рисунок 3.4

Паралельні коливальні контури бувають трьох видів (рис. 3.5).

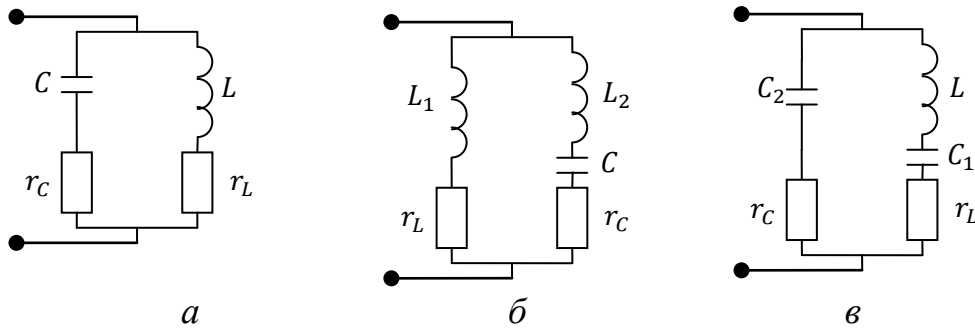


Рисунок 3.5

Вхідний опір паралельного контуру другого та третього виду

$$Z_{BX.ПАР.2} = p^2 \frac{Q \cdot \rho}{(1 + j\xi)} = \frac{p^2 R_E}{(1 + j\xi)}.$$

Якщо  $R_H \gg X_C$ , тоді одержуємо такі вирази внесеного опору

$$r_{BH} \cong \frac{R_H \cdot X_C^2}{R_H^2} = \frac{X_C^2}{R_H}, \quad x_{BH} \cong \frac{X_C \cdot R_H^2}{R_H^2} = X_C.$$

**Внесений опір** – це активний опір, що вноситься у контур зі сторони навантаження або зі сторони генератора (рис. 3.6)

$$r_{BH.H} = \frac{\rho^2}{R_H}; \quad r_{BH.\Gamma} = \frac{\rho^2}{R_\Gamma}.$$

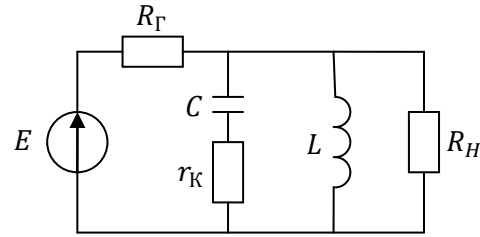


Рисунок 3.6

**Коефіцієнт включення** – це величина, що показує до якої частини реактивності ввімкнений активний опір

$$p = \frac{X_2}{X_1 + X_2} = \frac{X_2}{X} = \frac{X_2}{\rho}.$$

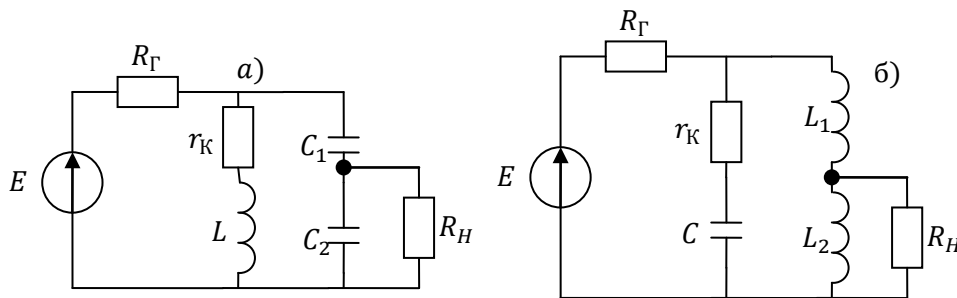


Рисунок 3.7

У такому випадку внесений опір визначається (рис. 3.7)

$$r_{BH} = \frac{p^2 \rho^2}{R_H}.$$

Внесений опір із другого контуру у перший

$$Z_{BH} = \frac{X_{3B}^2}{Z_{22}} = \frac{X_{3B}^2}{|R_2 + jX_{L2}|^2} R_2 - j \frac{X_{3B}^2}{|R_2 + jX_{L2}|^2} X_2 = R_{BH2} + jX_{BH2}.$$

## 3.2 Задачі для самостійного розв'язання

### 3.2.1 Послідовний контур

**Задача 3.1.** У послідовному контурі (рис. 3.8) визначити резонансну частоту  $\omega_0$ , добротність  $Q$ , смугу пропускання  $\Pi$  (в рад/мс та кГц) активну  $P$  та реактивні потужності контуру. Числові значення елементів кола:  $L$  в мкГн,  $C$  в пФ,  $R$  в Ом,  $E$  в мВ.

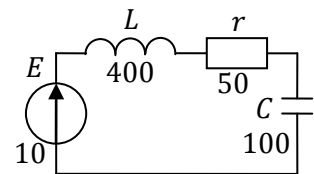


Рисунок 3.8

Відповідь:  $\omega_0 = 5$  рад/мкс,  $Q = 40$ ,  $\Pi = 125$  рад/мс,  
 $\Pi_{\text{Гц}} = 19.89$  кГц,  $P = 2$  мВт,  $Q_L = 0.08$  мВар,  $Q_C = -0.08$  мВар

**Задача 3.2.** У послідовному коливальному контурі знайти модуль вхідного опору. Відомо, що: а) характеристичний опір  $\rho = 500$  Ом та добротність  $Q = 50$ , зсув фази між напругою та струмом дорівнює  $45^\circ$ ; б) характеристичний опір  $\rho = 500$  Ом, добротність  $Q = 50$  та узагальнена розстройка  $\xi = \sqrt{3}$ .

Відповідь: а)  $|Z_{\text{ВХ}}| = 10\sqrt{2}$  Ом; б)  $|Z_{\text{ВХ}}| = 20$  Ом.

**Задача 3.3.** Знайти зсув фази між напругою та струмом на вході у послідовному коливальному контурі з добротністю  $Q = 50$  : а) при узагальненій розстройці  $\xi = 1/\sqrt{3}$ ; б) якщо модуль вхідного опору 20 Ом, характеристичний опір  $\rho = 500$  Ом.

Відповідь: а)  $\varphi_U - \varphi_I = 30^\circ$ ; б)  $\varphi_U - \varphi_I = 60^\circ$ .

**Задача 3.4.** Знайти потужності, які споживає на границях смуги пропускання послідовний коливальний контур. Контур живиться джерелом гармонічної напруги з амплітудою  $4\sqrt{2}$  В. Добротність контуру 25, характеристичний опір  $\rho = 1$  кОм.

Відповідь:  $P = 0.2$  Вт,  $Q = \mp 0.2$  Вар.

**Задача 3.5.** У високдобротному контурі (рис. 3.9) визначити, чому дорівнює амплітуда напруги на ємності  $U_{C2.m}$  при замкненому ключі? При розімкненому ключі амплітуда напруги на ємності  $U_{C1.m} = 10$  В, смуга пропускання  $\Pi_1 = 2$  кГц. При замкненому ключі смуга пропускання становить  $\Pi_2 = 5$  кГц.

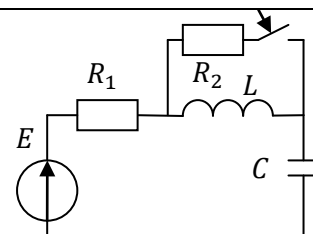


Рисунок 3.9

Відповідь:  $u_{C2} = 4$  В.



**Задача 3.6.** Знайти резонансну частоту послідовного коливального контуру. Добротність контура  $Q = 100$ , розстройка  $\Delta\omega = \sqrt{3} \cdot 10^5$  рад/с, фазовий зсув між живлячою контур напругою та струмом становить  $60^\circ$ .

Відповідь:  $\omega_0 = 20$  рад/мкс.

**Задача 3.7.** У послідовному коливальному контурі високої добротності визначити значення елементів контуру  $L$ ,  $r$  та добротність  $Q$ . Смуга пропускання  $10^4$  рад/с. Модуль вхідного опору цього контуру на границях смуги пропускання дорівнює  $5\sqrt{2}$  Ом, ємність контуру  $2$  нФ.

Відповідь:  $L = 0.5$  мГн,  $r = 5$  Ом,  $Q = 100$ .

**Задача 3.8.** Для нормованої резонансної кривої одиничного коливального контура  $\eta(\xi)$  знайти співвідношення між смугами пропускання за рівняннями  $0,5$  та  $0,707$ .

Відповідь:  $\Pi_{0,5}/\Pi_{0,7} = \sqrt{3}$ .

**Задача 3.9.** У контурі (рис. 3.8) визначити опір втрат контуру  $r$  та величину реактивності: ємність  $C$  (рис. 3.8 а) та індуктивність  $L$  (рис. 3.8 б). Подана частотна залежність напруги від частоти.

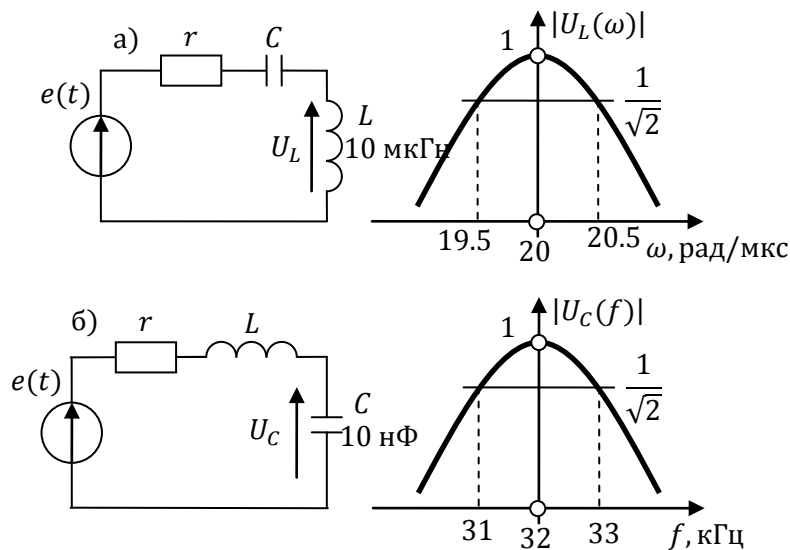


Рисунок 3.8

Відповідь: а)  $r = 10$  Ом,  $C = 0.2$  нФ; б)  $r = 31.4$  Ом  $L = 2.5$  мГн.

**Задача 3.10.** У контурі (рис. 3.11) розрахувати добротність та смугу пропускання до і після підключення генератора. Числові значення елементів:  $C$  в пФ,  $L$  в мГн,  $R$  в кОм,  $r_i$  в Ом. Зробити висновки про те, як змінилися добротність та смуга пропускання.

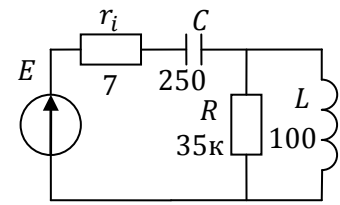


Рисунок 3.11

Відповідь:  $\Pi_1 = 18$  кГц,  $\Pi_2 = 29$  кГц,  $Q_1 = 55$ ,  $Q_1 = 34$ .

**Задача 3.11.** У контурах (рис. 3.10 а, б) визначити резонансну частоту  $\omega_0$ , вхідний опір на цій частоті, добротність, смугу пропускання (в рад/с та кГц). Числові значення елементів кола: індуктивності в мГн, ємності в нФ, напруга в В,  $r_K$ ,  $r_\Gamma$  в Ом,  $R_H$  в кОм. Зробити висновки про те, як впливає опір навантаження та генератор на добротність та смугу пропускання контуру.

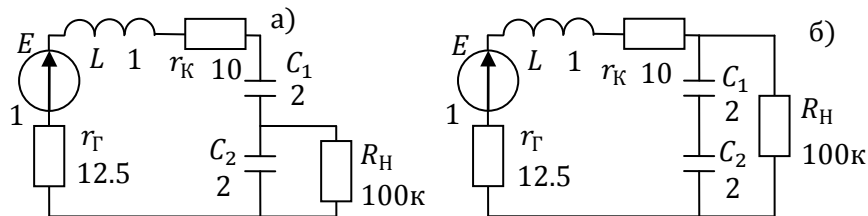


Рисунок 3.10

Відповідь: а)  $\omega_0 = 1$  рад/мкс,  $f_0 = 159.23$  кГц,  $Q_1 = 40$ ,  $\Pi_1 = 2.5 \cdot 10^4$  рад/с,  $\Pi_{1.Гц} = 3,979$  кГц; б)  $Q_2 = 31$ ,  $\Pi_2 = 3.25 \cdot 10^4$  рад/с,  $\Pi_{2.Гц} = 5.173$  кГц.

**Задача 3.12.** У колах (рис. 3.12) знайти вхідний опір на резонансній частоті  $Z_{BX}(\omega_0)$ , добротність. Числові значення елементів кола такі:  $r_K = 7,5$  Ом,  $r_\Gamma = 10$  Ом,  $R_H = 100$  кОм, а)  $C_1 = C_2 = 1$  нФ;  $L = 0.5$  мГн б)  $C = 1$  нФ,  $L_1 = L_2 = 0.5$  мГн.

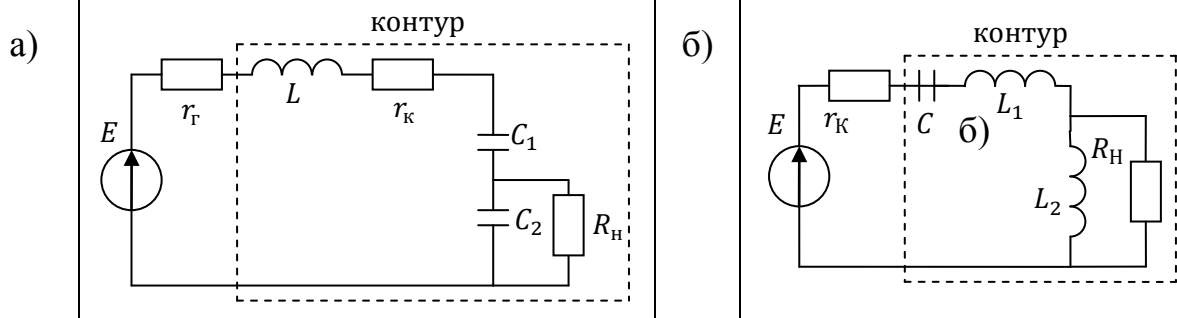


Рисунок 3.12

Відповідь: а)  $R = 20$  Ом,  $Q = 50$ ; б)  $R = 10$  Ом,  $Q = 100$ .

**Задача 3.13.** У контурі (рис. 3.12 а) визначити, за якого значення коефіцієнта включення виділиться максимальна потужність на резонансній частоті? Числові значення елементів:  $L = 1 \text{ мГн}$ ,  $r_K = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_H = 100 \text{ кОм}$ ,  $r_T = 12.5 \text{ Ом}$ ,  $C_E = 1 \text{ нФ}$ .

Відповідь:  $p = 0.5$ .

**Задача 3.14.** У контурі (рис. 3.12 а) визначити: а) коефіцієнт включення  $p$ , добротність; б) опір втрат контуру  $r_K$ , добротність. Числові значення елементів кола:  $r_T = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_H = 100 \text{ кОм}$ , вхідний опір на резонансній частоті  $R = 20 \text{ Ом}$ . У колах: а)  $r_K = 7.5 \text{ Ом}$ ,  $L = 4 \text{ мГн}$ ,  $C_E = 4 \text{ нФ}$ ; б)  $C_1 = C_2 = 4 \text{ нФ}$ ,  $L = 2 \text{ мГн}$ .

Відповідь: а)  $p = 0.5$ ,  $Q = 50$ ; б)  $r_K = 7.5 \text{ Ом}$ ,  $Q = 50$ .

**Задача 3.15.** У контурі (рис. 3.12 а) визначити ємності  $C_1$  та  $C_2$ , добротність. Числові значення елементів такі:  $r_T = 10 \text{ Ом}$ ,  $r_K = 7.5 \text{ Ом}$ ,  $R_H = 100 \text{ кОм}$ ,  $L = 2 \text{ мГн}$ . Коефіцієнт включення  $p = 0.25$ , вхідний опір на резонансній частоті  $R = 20 \text{ Ом}$ .

Відповідь:  $C_1 = 2/3 \text{ нФ}$ ,  $C_2 = 2 \text{ нФ}$ ,  $Q = 100$ .

**Задача 3.16.** У контурі (рис. 3.12 а) знайти вхідний опір кола на резонансній частоті  $Z_{BX}(\omega_0)$ , характеристичний опір. Числові значення елементів кола такі:  $r_K = 7.5 \text{ Ом}$ ,  $r_T = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_H = 100 \text{ кОм}$ . Добротність кола  $Q = 50$ , коефіцієнт включення  $p = 0.5$ .

Відповідь:  $Z_{BX1}(\omega_0) = 20 \text{ Ом}$ ,  $Z_{BX2}(\omega_0) = 140 \text{ Ом}$ ,  $\rho_1 = 1 \text{ кОм}$ ,  $\rho_2 = 7 \text{ кОм}$ .

**Задача 3.17** У контурах (рис. 3.12) знайти як зміниться смуга пропускання після підключення опору навантаження  $R_H$ . Добротність контур без врахування опору  $R_H$ : а)  $Q_1 = 120$ ; б)  $Q_1 = 80$ . Числові значення елементів кола такі:  $r$  в Ом,  $R_H$  в кОм,  $C$  в нФ,  $L$  в мГн.

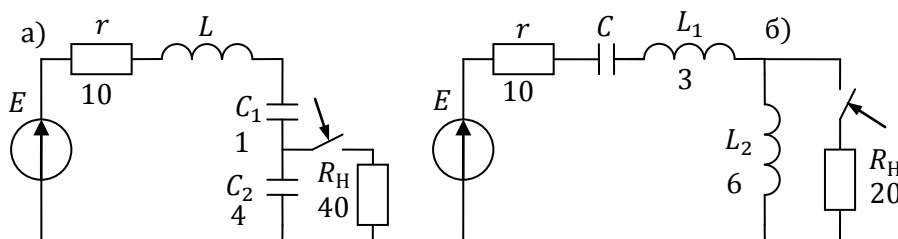


Рисунок 3.12

Відповідь: а) розшириться у 5.2 рази; б) розшириться у 1.5 рази.

### 3.2.2. Паралельний контур

**Задача 3.18.** У коливальний контур першого виду визначити амплітуди струмів у гілках контура на резонансній частоті. На резонансній частоті амплітуда струму, що втікає у контур дорівнює  $I_m = 1 \text{ мА}$ . На границі смуги пропускання відносна розстройка контура дорівнює 0.01.

Відповідь:  $I_L = 50 \text{ мА}$ .

**Задача 3.19.** У колі (рис. 3.16) визначити та побудувати залежність напруги  $|U_K(\Delta f)|$ . Визначити добротність та смугу пропускання із урахуванням дії генератора. Числові значення елементів:  $C$  в нФ,  $L$  в мГн,  $r_K$  в Ом,  $R_\Gamma$  в кОм,  $E$  в В.

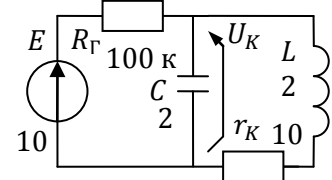


Рисунок 3.16

Відповідь:  $Q = 50$ ,  $\Pi = 10^4 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ ,  $|U_K(\xi)| = 5/\sqrt{1^2 + \xi^2}$ .

**Задача 3.20.** У контурі (рис. 3.18) визначити смугу пропускання у кГц із урахуванням опора генератора  $R_\Gamma$ , побудувати АЧХ коефіцієнта передачі за напругою. Числові значення елементів кола:  $L$  в мГн,  $C$  в нФ,  $E$  в В,  $r$  в Ом,  $R_\Gamma$  в кОм.

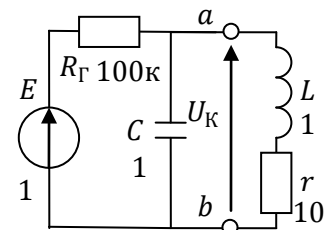


Рисунок 3.18

Відповідь:  $\Pi = 3.2 \text{ кГц}$ ,  $K_U(\xi) = 0.5/(1 + j\xi)$ .

**Задача 3.21.** У контурі (рис. 3.8) визначити опір  $R$  та величину реактивності: ємність  $C$  (рис. 3.8 а) та індуктивність  $L$  (рис. 3.8 б). Подана частотна залежність струму від частоти. Числові значення елементів кола: а)  $L = 32.5 \text{ мГн}$ ; б)  $C = 5 \text{ нФ}$ .

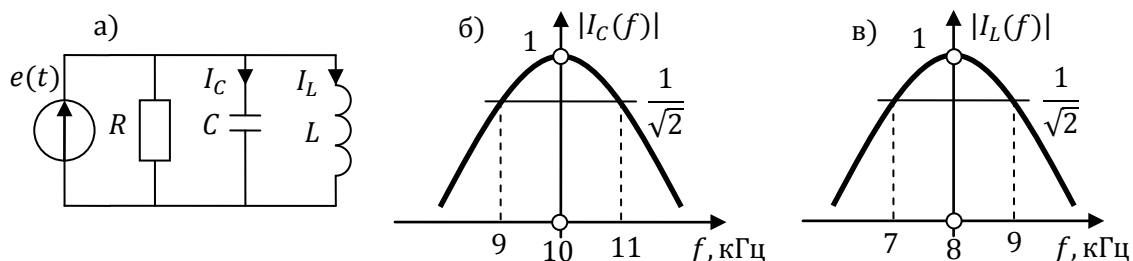
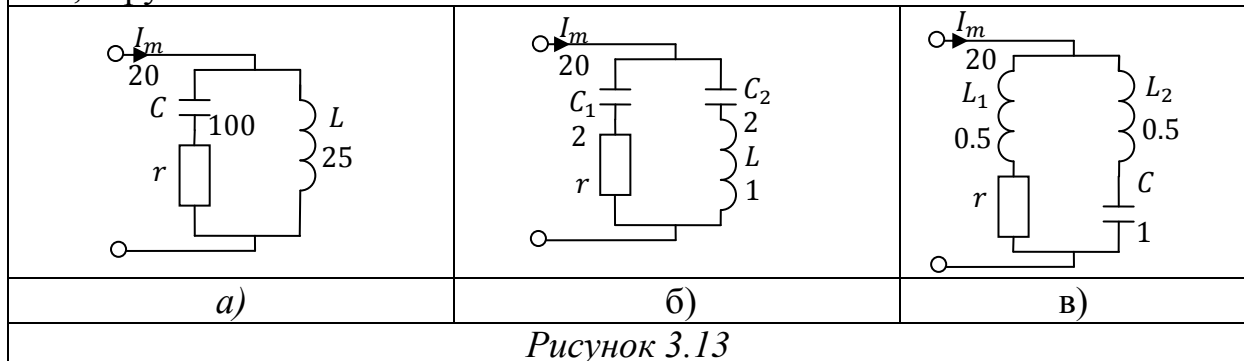


Рисунок 3.18

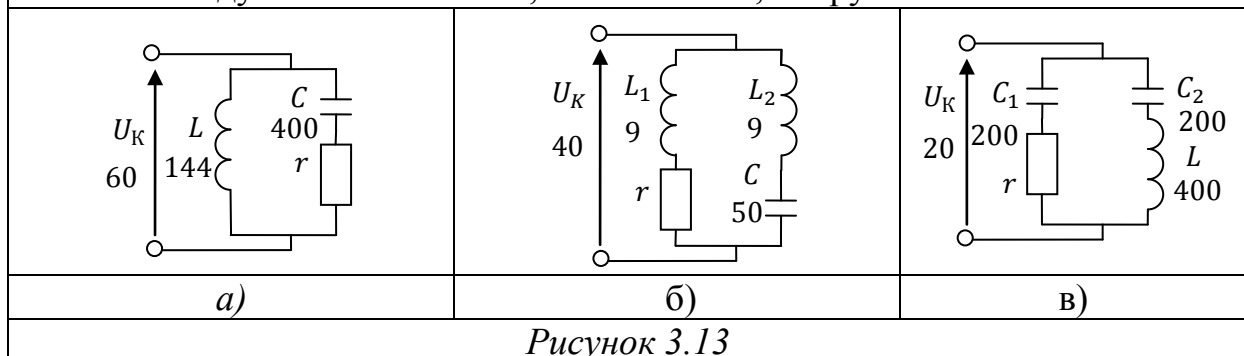
Відповідь: а)  $R = 10 \text{ кОм}$ ,  $C = 7.8 \text{ нФ}$ ; а)  $R = 16 \text{ кОм}$   $L = 80 \text{ мГн}$ .

**Задача 3.22.** У паралельному контурі (рис. 3.13) на резонансній частоті знайти потужність, що споживає контур  $P(\omega_0)$  в Вт. Амплітуда струму, що втікає у контур є  $I_m$ . Добротність контура: а)  $Q = 50$ ; б)  $Q = 40$ ; в)  $Q = 40$ . Числові значення елементів кола: індуктивності в мГн, ємності в нФ, струм в мА.



Відповідь: а)  $P(\omega_0) = 20$  Вт; б)  $P(\omega_0) = 2$  Вт; в)  $P(\omega_0) = 2$  Вт.

**Задача 3.23.** У паралельному контурі високої добротності (рис. 3.17) визначити опір контуру на резонансній частоті  $R_E$ , добротність та смугу пропускання у кГц. Потужність, що споживається контуром на резонансній частоті  $P(\omega_0) = 50$  мВт, амплітуда напруги на контурі  $U_K$ . Числові значення: індуктивності в мкГн, ємності в пФ, напруга в В.

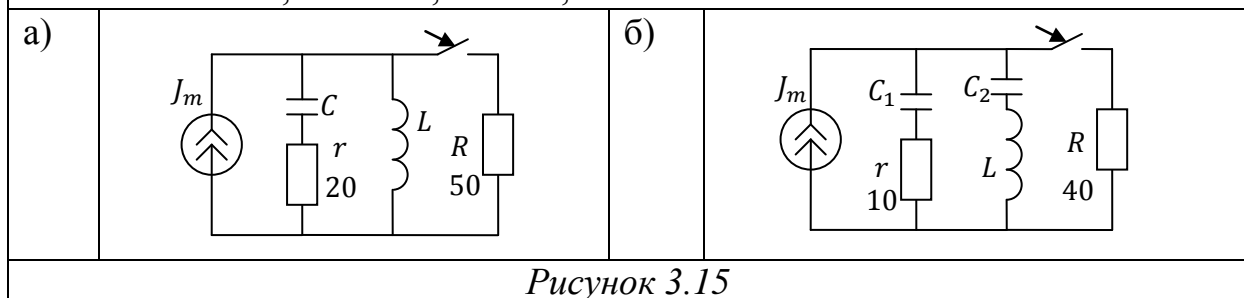


Відповідь: а)  $R_E = 36$  кОм,  $Q = 60$ ,  $\Pi = 11.05$  кГц;

б)  $R_E = 16$  кОм,  $Q = 107$ ,  $\Pi = 49.5$  кГц;

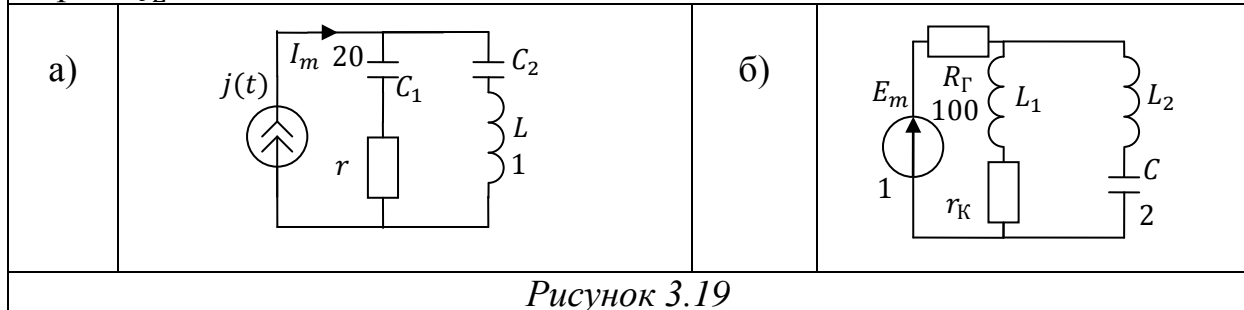
в)  $R_E = 4$  кОм,  $Q = 8$ ,  $\Pi = 100$  кГц.

**Задача 3.24.** У контурі (рис. 3.15) визначити як зміниться смуга пропускання, якщо паралельно до контуру підключити опір  $R$  [кОм]. Добротність контуру  $Q_1 = 80$  без врахування опору  $R$ ,  $C_1 = C_2$ . Числові значення на схемі:  $r$  – Ом,  $R$  – кОм,  $C$  – нФ,  $L$  – мГн.



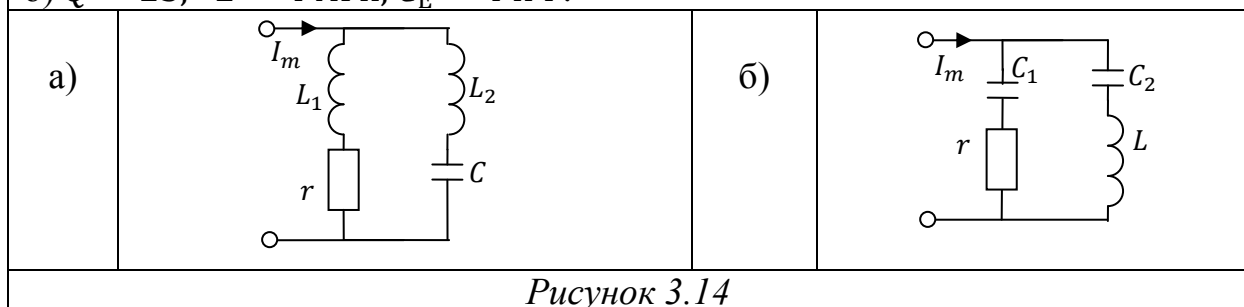
Відповідь: а) розшириться у 3.5 рази; б) розшириться у 1.4 рази.

**Задача 3.25.** У паралельному контурі (рис. 3.19) визначити коефіцієнт включення  $p$ . Числові значення елементів схеми: а)  $Q = 40$ ,  $L = 1$  мГн,  $C_E = 1$  нФ,  $P(\omega_0) = 2$  Вт,  $I_m = 20$  мА; б)  $Q = 100$ ,  $C = 2$  нФ,  $L_E = 2$  мГн,  $E = 1$  В,  $R_\Gamma = 100$  кОм, еквівалентна добротність із врахуванням внесених втрат  $Q_E = 80$ .



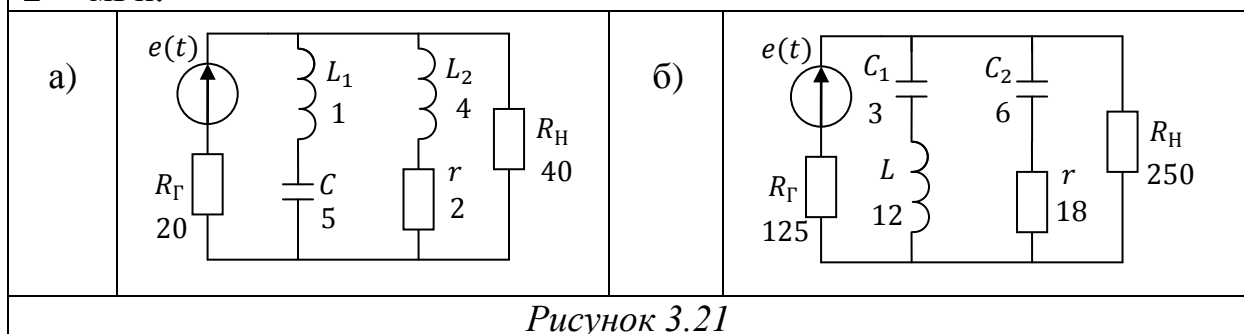
Відповідь: а)  $p = 0.5$ ; б)  $p = 0.5$ .

**Задача 3.26.** У паралельному контурі (рис. 3.14) визначити значення індуктивностей  $L_1$  та  $L_2$  (рис. 3.14 а) та ємностей  $C_1$  та  $C_2$  (рис. 3.14 б) Амплітуда струму, що втікає у контур становить  $I_m = 20$  мА. На резонансній частоті потужність, що споживає контур є  $P(\omega_0) = 0.2$  Вт. Числові значення елементів схеми такі: а)  $Q = 64$ ,  $C = 2$  нФ,  $L_E = 2$  мГн; б)  $Q = 25$ ,  $L = 4$  мГн,  $C_E = 4$  нФ.



Відповідь: а)  $L_1 = 0.25$  мГн,  $L_2 = 1.75$  мГн; б)  $C_1 = 20$  нФ,  $C_2 = 5$  нФ.

**Задача 3.27.** У контурах (рис. 3.21) визначити смугу пропускання в кГц із урахуванням всіх опорів, що внесені у контур. На вході кола напруга  $e(t) = 2\cos(\omega t)$  В. Числові значення елементів:  $R$  – кОм,  $r$  – Ом,  $C$  – нФ,  $L$  – мГн.



Відповідь: а)  $\Pi_{\Gamma\Omega} = 1.6$  кГц; б)  $\Pi_{\Gamma\Omega} = 0.32$  кГц.

**Задача 3.28.** Визначити модуль напруги на контурі  $|u_K(\xi)|$  (рис. 3.20), побудувати її графік. Числові значення елементів:  $R_H = 100$  кОм, струм джерела  $j(t) = 2 \cdot 10^{-5} \cos(\omega t)$  мА,  $R$  – Ом,  $C$  – нФ,  $L$  – мГн.

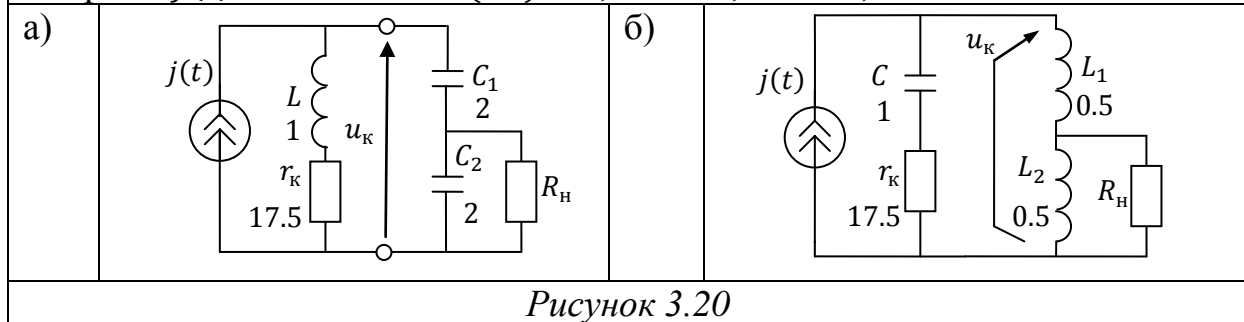


Рисунок 3.20

Відповідь: а)  $|u_K(\xi)| = 1/\sqrt{1 + \xi^2}$ ; б)  $|u_K(\xi)| = 1/\sqrt{1 + \xi^2}$ .

**Задача 3.29.** У контурах (рис. 3.21) визначити резонансну частоту, смугу пропускання в кГц, добротність системи із урахуванням всіх опорів, що внесені у контур. Отримати вираз та побудувати  $|U_K(\xi)|$ ,  $|U_K(\Delta f)|$ . На вході кола напруга  $e(t) = 2 \cos(\omega t)$ , В чи струм  $j(t) = 0.1 \cos(\omega t)$ , мА. Числові значення елементів:  $R$  – кОм,  $r$  – Ом,  $C$  – нФ,  $L$  – мГн.

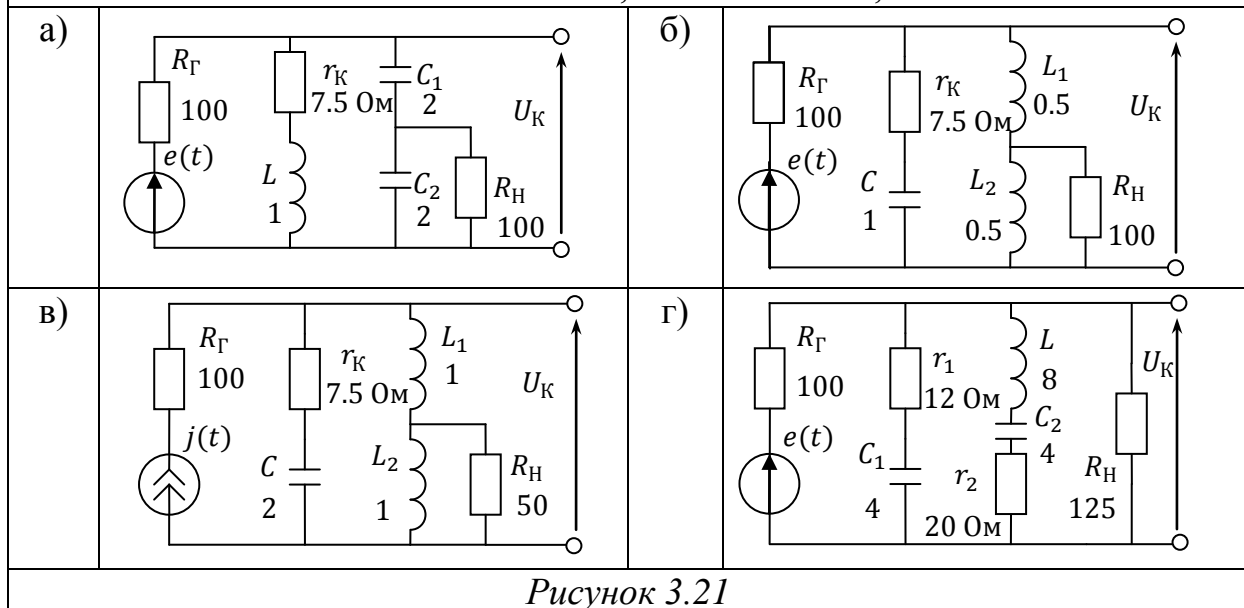


Рисунок 3.21

Відповідь: а)  $\omega_0 = 1$  рад/мкс,  $f_0 = 159.23$  кГц,  $Q = 50$ ,  $\Pi = 2 \cdot 10^4$  рад/с,

$\Pi_{\text{Гц}} = 3,183$  кГц,  $u_K(\xi) = 1/\sqrt{1 + \xi^2}$ ;

б)  $\omega_0 = 1$  рад/мкс,  $f_0 = 159.23$  кГц,  $Q = 50$ ,  $\Pi = 2 \cdot 10^4$  рад/с,

$\Pi_{\text{Гц}} = 3,183$  кГц,  $u_K(\xi) = 1/\sqrt{1 + \xi^2}$ ;

в)  $\omega_0 = 0.5$  рад/мкс,  $f_0 = 79.58$  кГц,  $Q = 80$ ,  $\Pi = 1.25 \cdot 10^4$  рад/с,

$\Pi_{\text{Гц}} = 0,995$  кГц,  $u_K(\xi) = 8/\sqrt{1 + \xi^2}$ ;

г)  $\omega_0 = 0.25$  рад/мкс,  $f_0 = 39.79$  кГц,  $Q = 40$ ,  $\Pi = 6.25 \cdot 10^3$  рад/с,  $\Pi_{\text{Гц}} = 0,99$  кГц;

$u_K(\xi) = 1.6/\sqrt{1 + \xi^2}$

### 3.2.3. Контури із магнітними зв'язками

**Задача 3.30.** Визначити опір втрат, що вноситься у контур (рис. 3.22) для схеми а, що складається із елементів  $R, L, C$  та має різні схеми живлення. Із урахуванням внесених та власних втрат добротність схем а та б мають значення:  $Q_A = 25$ ,  $Q_B = 50$ . Числові значення елементів кола:  $L/C = 10^6$ ,  $R_2 = 100 \text{ кОм}$ .

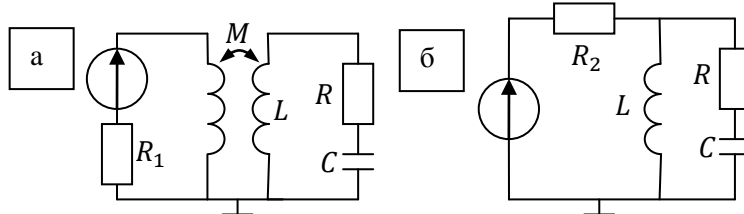
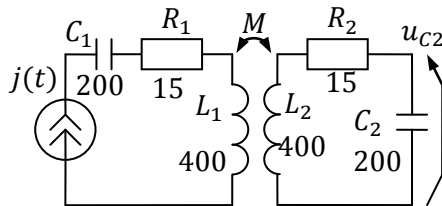


Рисунок 3.22

Відповідь:  $r_{\text{вн.А}} = 30 \text{ Ом}$ .

**Задача 3.31.** У двох однакових контурах (рис. 3.24) одержати та побудувати залежність АЧХ напруги  $U_{C2}(\xi)$  та  $U_2(\Delta f)$ . Числові значення елементів контуру: опори в Ом, індуктивності в мГн, ємності в пф. Струм  $j(t) = 1 \cos \omega t \text{ мА}$ ,  $k = 0.02$ .

а)



б)

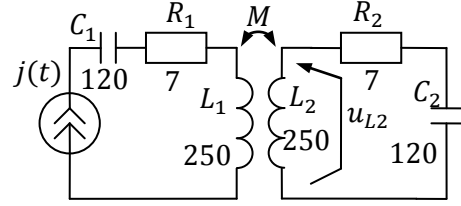
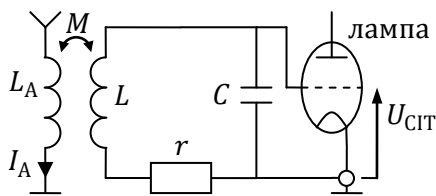


Рисунок 3.24

Відповідь: а)  $|u_{C2}(\xi)| = 2.67/\sqrt{1 + \xi^2}$ ; б)  $|u_{L2}(\xi)| = 6/\sqrt{1 + \xi^2}$ .

**Задача 3.32.** У контурах (рис. 3.23) визначити напруги на сітці лампи  $U_{\text{СІТ}}$  на резонансній частоті  $\omega_0 = 10^6 \text{ рад/с}$ . Амплітуда струму у антені на цій частоті  $I_A = 1 \text{ мкА}$ , вхідний опір лампи  $R_{\text{вх.л}} = 100 \text{ кОм}$ . Числові значення елементів:  $r = 10 \text{ Ом}$ ,  $L = 1 \text{ мГн}$ , величина взаємної індуктивності  $M = 10 \text{ мкГн}$ ,  $C_1 = C_2$ .

а)



б)

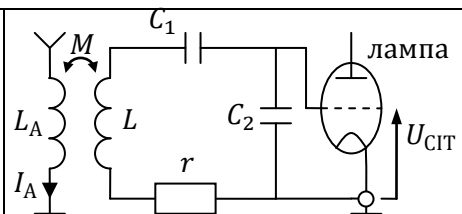


Рисунок 3.23

Відповідь: а)  $U_{\text{СИТ}} = 0.5 \text{ мВ}$ ; б)  $U_{\text{СИТ}} = 0.4 \text{ мВ}$ .



**Задача 3.33.** У контурах (рис. 3.24) визначити струм в антені  $I_A$  на резонансній частоті  $f_0 = 160$  кГц. Амплітуда напруги на сітці лампи на цій частоті  $U_{\text{СІТ}}$ , вхідний опір лампи  $R_{\text{ВХ.Л}}$  в кОм. Числові значення елементів: опори в Ом, ємність в нФ, індуктивність в мГн, взаємна індуктивність в мкГн, напруга в мВ,  $C_1 = C_2$ ,  $L_1 = L_2$ .

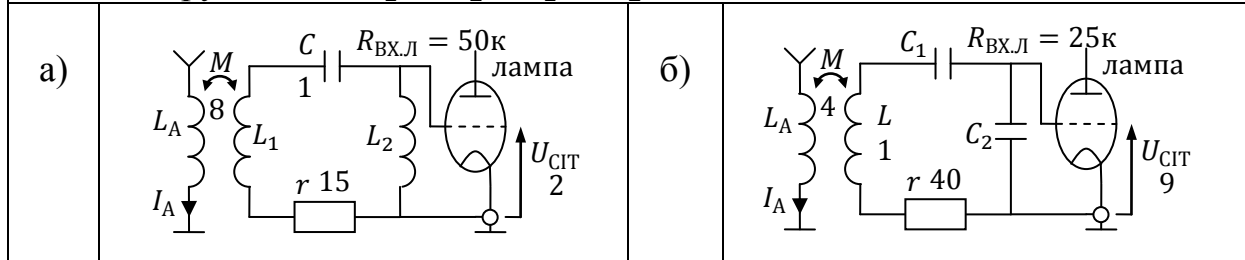


Рисунок 3.24

Відповідь: а)  $I_A = 10$  мкА; б)  $I_A = 150$  мкА.

**Задача 3.34.** Знайти вхідний опір кіл  $Z_{ab}$  (рис. 3.26). Абсолютні значення опорів елементів схеми для заданої частоти наведені на схемі:  $r$  в Ом,  $R$  в кОм.

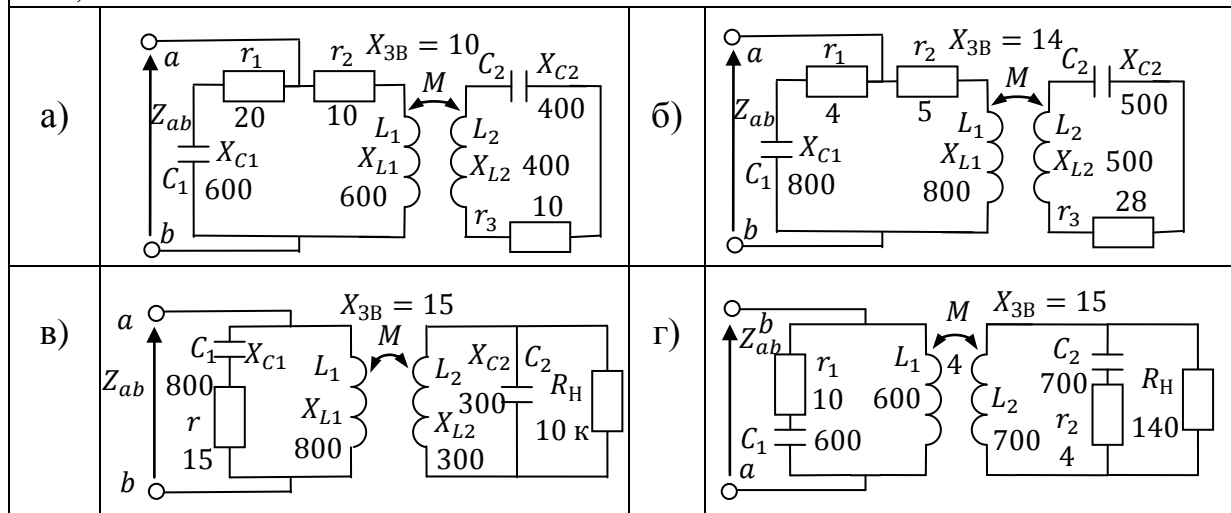


Рисунок 3.26

Відповідь: а)  $Z_{ab} = 9$  кОм; б)  $Z_{ab} = 40$  кОм; в)  $Z_{ab} = 16$  кОм; г)  $Z_{ab} = 9$  кОм

**Задача 3.35\***. У колі (рис. 3.31) визначити вхідний опір  $Z_{\text{ВХ}}$  в кОм. Числові значення елементів кола наведені на схемі:  $r$  в Ом,  $R$  в кОм.

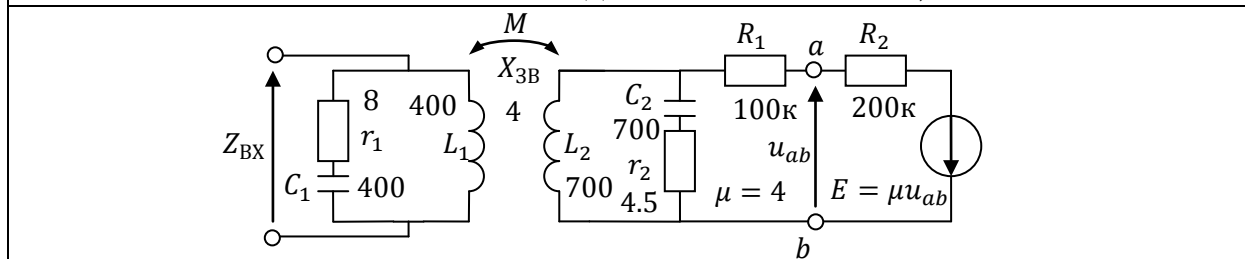


Рисунок 3.31

Відповідь:  $Z_{\text{ВХ}} = 16$  кОм.

**Задача 3.36.** У контурах (рис. 3.24) на резонансній частоті визначити напругу у навантаженні  $U_H$ . Джерело струму  $j(t) = 3 \cos \omega t$  мкА. Числові значення елементів такі:  $r$  в Ом,  $R$  в кОм, індуктивність в мГн, ємність в нФ, взаємна індуктивність в мкГн.

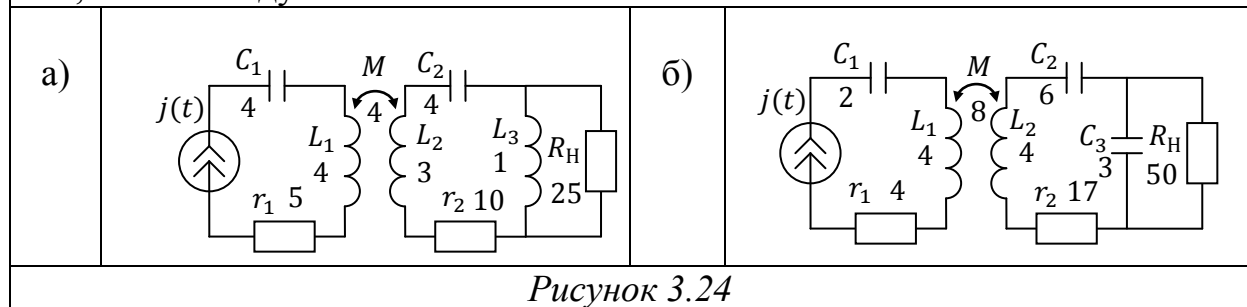


Рисунок 3.24

Відповідь: а)  $U_H = 60$  мВ; б)  $U_H = 227$  мВ.

### 3.2.4. Олімпіадні задачі

**Задача 3.37.** У колі (рис. 3.34) визначити значення ємностей  $C_1$  та  $C_2$ . Значення еквівалентної ємності послідовного з'єднання  $C_1$  та  $C_2$  становить  $C_E = 800$  пФ. Напруга контуру на резонансній частоті є  $U_K(0) = 2$  В. Числові значення елементів подані на схемі. Опори  $R_1$  та  $R_4$  задані в кОм, опори  $R_2$  та  $R_3$  задані в Ом, індуктивності в мГн, напруга у В.

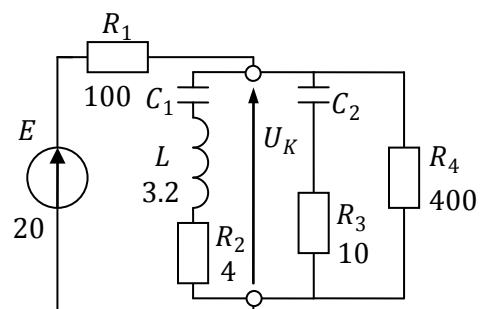


Рисунок 3.34

Відповідь:  $C_1 = 4$  нФ,  $C_2 = 1$  нФ.

**Задача 3.38\*** У колі (рис. 3.31) визначити смугу пропускання в кГц. Числові значення елементів кола наведені на схемі:  $r$  в Ом,  $R$  в кОм, ємність в нФ, індуктивність в мГн.

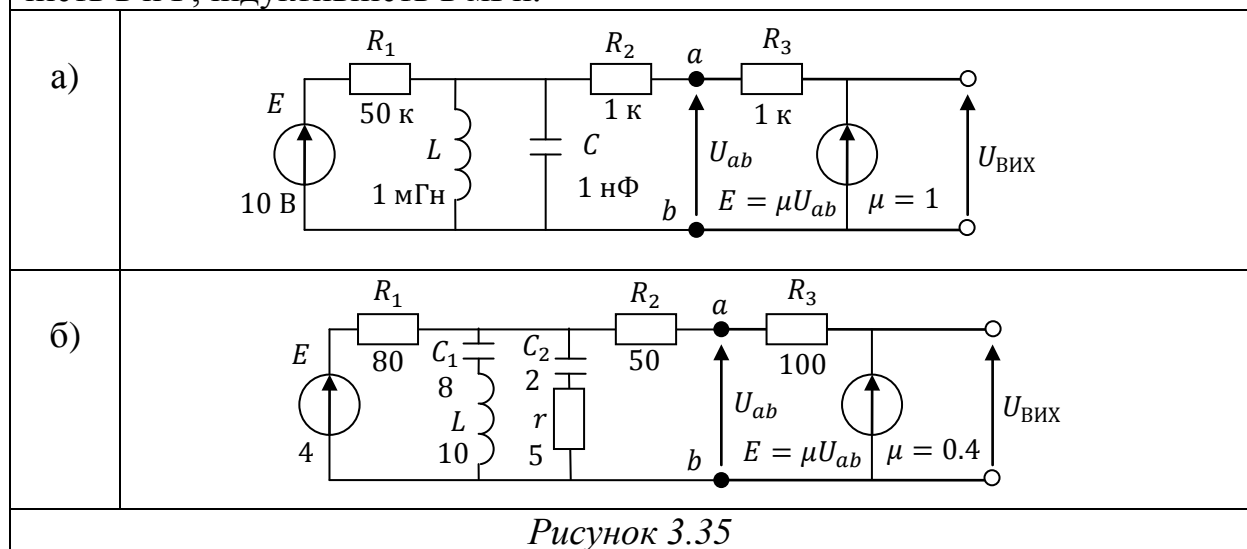


Рисунок 3.35

Відповідь: а)  $\Pi_{\Gamma\Gamma} = 3.183$  кГц; б)  $\Pi_{\Gamma\Gamma} = 1.17$  кГц.

**Задача 3.39\***. У колі (рис. 3.27) на резонансній частоті знайти  $Z_C$ . Числові значення елементів:  $R = |Z_L| = 2 \text{ кОм}$ .

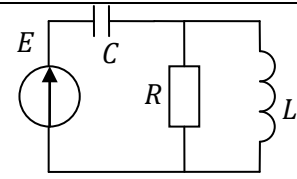


Рисунок 3.27

Відповідь:  $Z_C = -j \text{ кОм}$ .

**Задача 3.40\***. У колі (рис. 3.28) визначити  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $Z_C$ ,  $Z_L$ . У резонансному режимі активні потужності  $P_1 = P_2 = 10 \text{ мВт}$ , амплітуди напруг  $U_C = E = 5 \text{ В}$ .

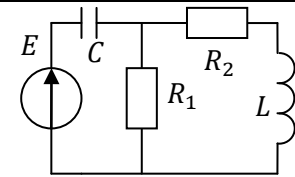


Рисунок 3.28

Відповідь:  $R_1 = 5 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 1 \text{ кОм}$ ,  $Z_C = -1,25j \text{ кОм}$ ,  $Z_L = 2j \text{ кОм}$ .

**Задача 3.41**. У колах (рис. 3.29) визначити  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $Z_C$ ,  $Z_L$ . У резонансному режимі потужності: а)  $P_1 = 20 \text{ мВт}$ ,  $Q_C = -40 \text{ мВар}$ ,  $X_L = 2,5 \text{ мВар}$ ,  $J = 4 \text{ мА}$ ; б)  $P_1 + P_2 = 16 \text{ мВт}$ ,  $U_L = 2\sqrt{2} \text{ В}$ ,  $R_2 = 1 \text{ кОм}$ ,  $J = 4 \text{ мА}$ .

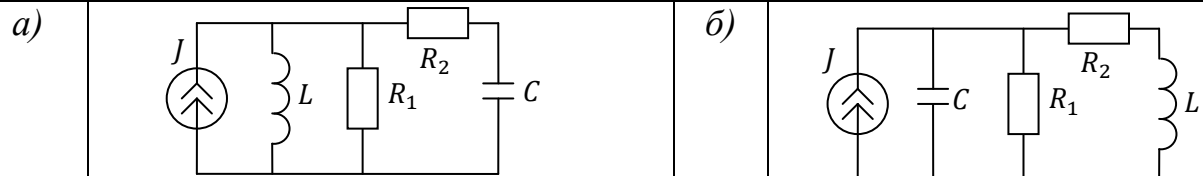


Рисунок 3.29

Відповідь: а)  $R_1 = 5 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 1 \text{ кОм}$ ,  $Z_C = -2j \text{ кОм}$ ;

б)  $R_1 = 2 \text{ кОм}$ ,  $Z_C = -2j \text{ кОм}$ ,  $Z_L = j \text{ кОм}$ .

**Задача 3.42**. У контурі (рис. 3.30) знайти значення опорів  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $Z_C$ ,  $Z_L$ . На резонансній частоті потужність на активних елементах контуру:  $P_1 = 72 \text{ мВт}$ ,  $P_2 = 80 \text{ мВт}$ ,  $P_3 = 40 \text{ мВт}$ , причому  $R_1 = R_3$ , діюче значення напруги джерела  $E = 32 \text{ В}$ .

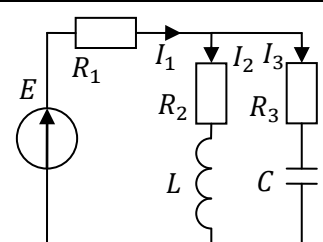


Рисунок 3.30

Відповідь:  $Z_L = 2,5j \text{ кОм}$ ,  $Z_C = -4j \text{ кОм}$ ,  $R_1 = 2 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 2,5 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = 2 \text{ кОм}$ .

**Задача 3.43\*\*.** У колі (рис. 3.33) визначити параметри елементів контуру так, щоб для покриття всього діапазону частот використовувався весь діапазон зміни ємності і мінімальна загальна ємність контуру не була меншою 50 пФ. Вхідний контур приймача потрібно настроїти в резонанс на проміжку частот 11..12 МГц конденсатором, ємність  $C$  якого змінюється в межах 11..490 пФ.

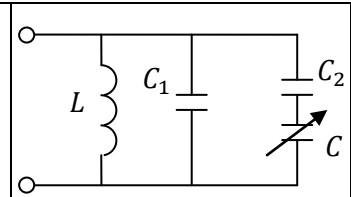


Рисунок 3.33

Відповідь:  $C_1 = 43.4$  пФ,  $C_2 = 16.7$  пФ.

**Задача 3.44\*\*.** У колі (рис. 3.32) визначити резонансну частоту у загальному вигляді через параметри елементів, що позначені на схемі.

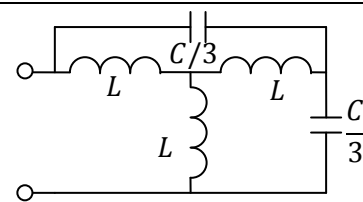


Рисунок 3.32

Відповідь:  $\omega = \sqrt{3/(LC)}$ .

**Задача 3.45\*\*.** Задані параметри послідовної схеми заміщення джерела електричної енергії  $e(t) = 10 \cdot \cos(10^4 \cdot t) + \cos(2 \cdot 10^4 \cdot t)$ , В із внутрішнім опором  $R_i = 10$  кОм. Обґрунтуйте, який коливальний контур необхідно ввімкнути до цього джерела, щоб одержати на його затискачах напругу  $u(t) = 0.01 \cdot \cos(10^4 \cdot t) + 0.1 \cdot \cos(2 \cdot 10^4 \cdot t)$ . Визначити параметри елементів контура.

Відповідь:  $C_1 = 0.47$  мкФ,  $C_2 = 1.41$  мкФ,  $L = 7.027$  мГн,  $r_L = 10$  Ом.

## 4. СХЕМНІ ФУНКЦІЇ ТА ПРОХІДНІ ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ

### 4.1. Короткі теоретичні відомості

#### 4.1.1. Поняття про схемні функції

У загальному випадку під схемною функцією (СФ) розуміють (рис. 4.1)

$$\text{СФ} = \frac{\text{Реакція}}{\text{Дія}}.$$

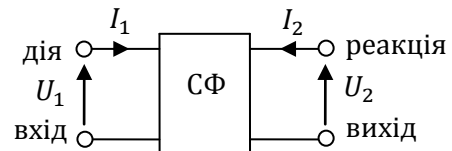


Рисунок 4.1

Схемні функції

1	Коефіцієнт передачі за напругою	$K_U = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}}$
2	Коефіцієнт передачі за струмом	$K_I = \frac{I_{\text{ВИХ}}}{I_{\text{ВХ}}}$
3	Вхідний опір	$Z_{\text{ВХ}} = \frac{U_{\text{ВХ}}}{I_{\text{ВХ}}}$
4	Вхідна провідність	$Y_{\text{ВХ}} = \frac{I_{\text{ВХ}}}{U_{\text{ВХ}}}$
5	Передавальний опір	$Z_{\text{ПЕР}} = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{I_{\text{ВХ}}}$
6	Передавальна провідність	$Y_{\text{ПЕР}} = \frac{I_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}}$

Для розрахунку схемних функцій частіше використовують операторні опори та провідності індуктивностей та ємностей (таблиця 4.1)

Таблиця 4.1. Операторні величини

Опори	Провідності
$Z_L(p) = pL$	$Y_L(p) = \frac{1}{pL}$
$Z_C(p) = \frac{1}{pC}$	$Y_C(p) = pC$

Розглянемо розрахунок схемних функцій у простому колі.

Коефіцієнти передачі за напругою (рис.

4.2 а)

$$K_U = \frac{U_{\text{ВІХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}.$$

Коефіцієнти передачі за струмом

(рис.4.2 б)

$$K_I = \frac{I_{\text{ВІХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2}.$$

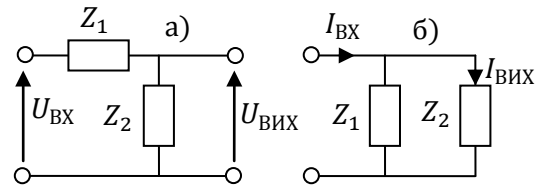


Рисунок 4.2

Схемі відповідає матриця еквівалентних параметрів, наприклад **Z** та **Y** (рис. 4.3), а значить за матрицею можна знаходити схемні функції.

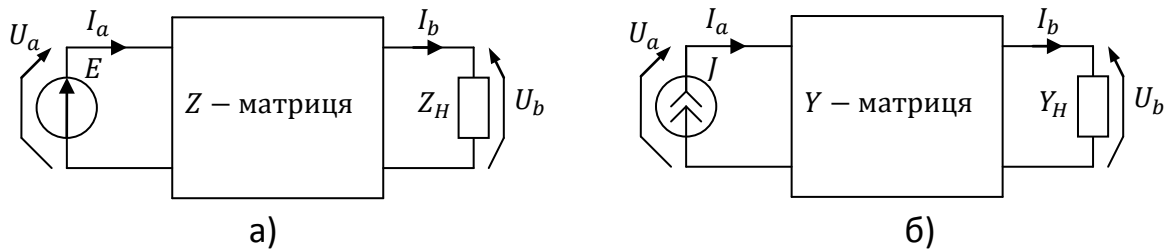


Рисунок 4.3

Коефіцієнт передачі за струмом:

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$K_i = \frac{I_{\text{ВІХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}.$	$K_i = \frac{I_{\text{ВІХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Y_H.$

Коефіцієнт передачі за напругою

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$K_u = \frac{U_{\text{ВІХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Z_H.$	$K_u = \frac{U_{\text{ВІХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}.$

Перехідна провідність

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$Y_{ba} = \frac{I_{\text{ВІХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}.$	$Y_{ba} = \frac{I_{\text{ВІХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} \cdot Y_H.$

Перехідний опір

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$Z_{ba} = \frac{U_{\text{ВІХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} \cdot Z_H.$	$Z_{ba} = \frac{U_{\text{ВІХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}.$

Вхідний опір

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$Z_{\text{ВХ}} = \frac{U_{\text{ВХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{\Delta}{\Delta_{aa}}.$	$Z_{\text{ВХ}} = \frac{U_{\text{ВХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta}.$

### 4.1.2. Поняття про чотириполюсники

Численні електротехнічні пристрої, що призначені для перетворення та пересилання електричної енергії, мають два вхідних та вихідних затискачі, при цьому їх внутрішнє електричне коло може бути довільної складності називають **чотириполюсниками** (ЧТП). У курсі ОТК більш докладно розглядаються прохідні чотириполюсники (одна пара полюсів – вхідні, інша – вихідні, рис. 4.4).

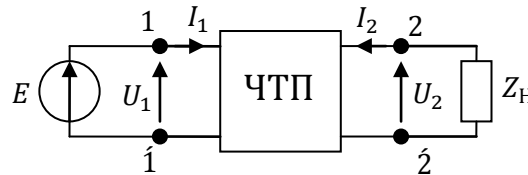


Рисунок 4.4

У силу лінійності можна написати шість систем рівнянь, що зв'язують між собою струми та напруги на вході та виході чотириполюсника.

Система  $Y$  – параметрів чотириполюсників

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

Система  $Z$  – параметрів чотириполюсника

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2, \\ U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Система  $h$  – параметрів чотириполюсника

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} \cdot I_1 + h_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = h_{21} \cdot I_1 + h_{22} \cdot U_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

Система  $A$  – параметрів чотириполюсника

$$\begin{cases} U_1 = A_{11} \cdot U_2 + A_{12} \cdot I_2, \\ I_1 = A_{21} \cdot U_2 + A_{22} \cdot I_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Коли розглядаються  $A$  - параметри, вихідний  $I_2$  струм направляють назовні.

Система  $B$  – параметрів чотириполюсника

$$\begin{cases} U_2 = B_{11} \cdot U_1 + B_{12} \cdot I_1, \\ I_2 = B_{21} \cdot U_1 + B_{22} \cdot I_1; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}.$$

Система  $F$  – параметрів чотириполюсника

$$\begin{cases} I_1 = F_{11} \cdot U_1 + F_{12} \cdot I_2, \\ U_2 = F_{21} \cdot U_1 + F_{22} \cdot I_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Кожному параметру можна надати фізичний зміст:

$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right _{I_2=0} = Z_{\text{ВХ}}$	– вхідний опір при холостому ході виходу;
$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right _{U_2=0} = Y_{\text{ВХ}}$	– вхідна провідність при замкненому виході;
$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right _{U_2=0} = K_i$	– коефіцієнт передачі за струмом при замкненому виході.

Пасивні чотириполюсники можна замінити Т-подібною та П-подібною схемами заміщення

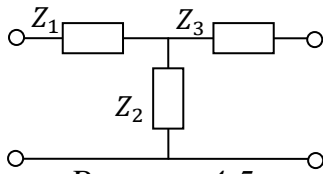


Рисунок 4.5

Матриця опорів кола (рис. 4.5)

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_a + Z_b & Z_b \\ Z_b & Z_b + Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}.$$

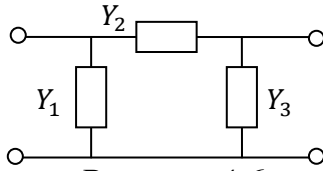


Рисунок 4.6

Матриця провідностей кола (рис. 4.6)

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b & -Y_b \\ -Y_b & Y_b + Y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}.$$

Зв'язок між Z- та Y-параметрами чотириполюсника

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_Y} \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix};$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_Z} \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix}.$$

Система Z-параметрів чотириполюсника:

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2, \\ U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2. \end{cases}$$

Схема заміщення подана на рис. 4.7.

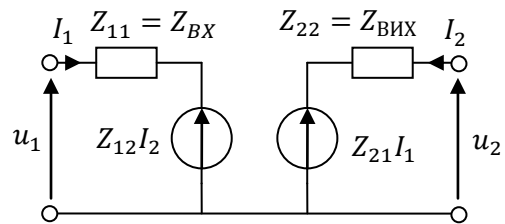


Рисунок 4.7

Фізичний зміст параметрів

$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right _{I_2=0} = Z_{\text{ВХ}}$	– вхідний опір при у режимі холостого ходу виходу;
$Z_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right _{I_1=0} = Z_{\text{ПЕРЕХ.12}}$	– зворотний перехідний опір у режимі холостого ходу на вході;
$Z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right _{I_2=0} = Z_{\text{ПЕРЕХ.21}}$	– прямий перехідний опір у режимі холостого ходу на виході;
$Z_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right _{I_1=0} = Z_{\text{ВИХ}}$	– вихідний опір у режимі холостого ходу на вході.



Система  $Y$ -параметрів чотириполус-  
ника:

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2. \end{cases}$$

Схема заміщення подана на рис. 4.8.

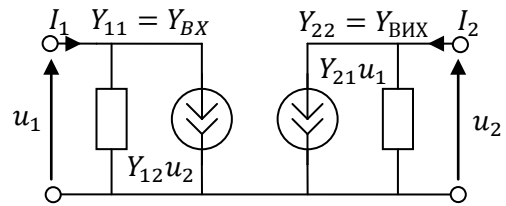


Рисунок 4.8

Фізичний зміст параметрів

$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right _{U_2=0} = Y_{ВХ}$	– вхідна провідність у режимі короткого замикання виходу;
$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right _{U_1=0} = Y_{ПЕРЕД.12}$	– зворотна передатна провідність у режимі короткого замикання на вході;
$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right _{U_2=0} = Y_{ПЕРЕД.21}$	– пряма передатна провідність у режимі короткого замикання на виході;
$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right _{U_1=0} = Y_{ВЫХ}$	– вихідна провідність у режимі короткого замикання входу.

Система  $h$ -параметрів чотириполус-  
ника:

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} \cdot I_1 + h_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = h_{21} \cdot I_1 + h_{22} \cdot U_2. \end{cases}$$

Схема заміщення подана на рис. 4.9.

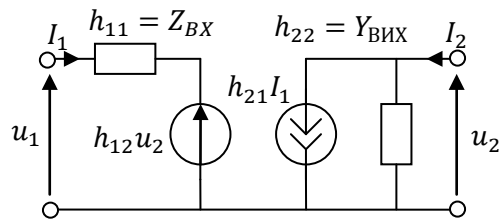


Рисунок 4.9

Фізичний зміст параметрів

$h_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right _{U_2=0} = Z_{ВХ}$	– вхідний опір у режимі короткого замикання виходу;
$h_{12} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right _{I_1=0} = \frac{1}{K_U}$	– величина обернена до коефіцієнта передачі за напругою у режимі холостого ходу на вході;
$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right _{U_2=0} = K_I$	– коефіцієнт передачі струму у режимі короткого замикання на виході;
$h_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right _{I_1=0} = Y_{ВЫХ}$	– вихідна провідність у режимі холостого ходу на вході.

## 4.2. Задачі для самостійного розв'язання

### 4.2.1 Схемні функції простих кіл

**Задача 4.1.** У колах (рис. 4.10) знайти комплексний коефіцієнт передачі за струмом, побудувати його АЧХ та ФЧХ. Числові значення елементів на схемі: опори в кОм, індуктивності в мГн, ємності в нФ.

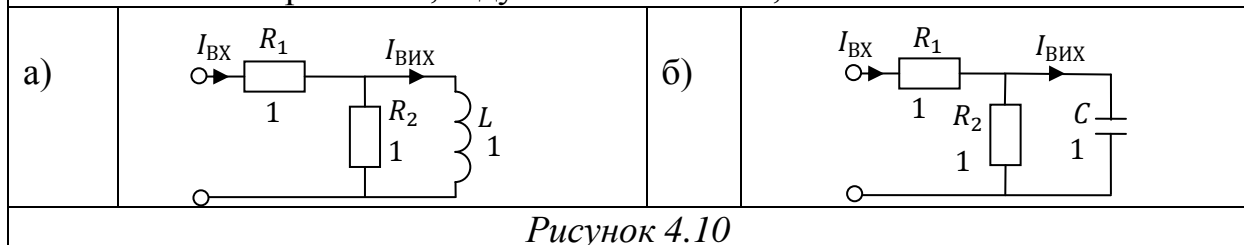


Рисунок 4.10

Відповідь: а)  $K_I(\omega) = 1/(1 + j\omega)$ ; б)  $K_I(\omega) = j\omega/(1 + j\omega)$ .

**Задача 4.2.** У колах (рис. 4.11) знайти вираз коефіцієнта передачі за напругою, побудувати його АЧХ та ФЧХ. На графіку вказати початкові значення та асимптоти. Числові значення подані на схемах: опори – кОм, індуктивності – мГн, ємності – нФ.

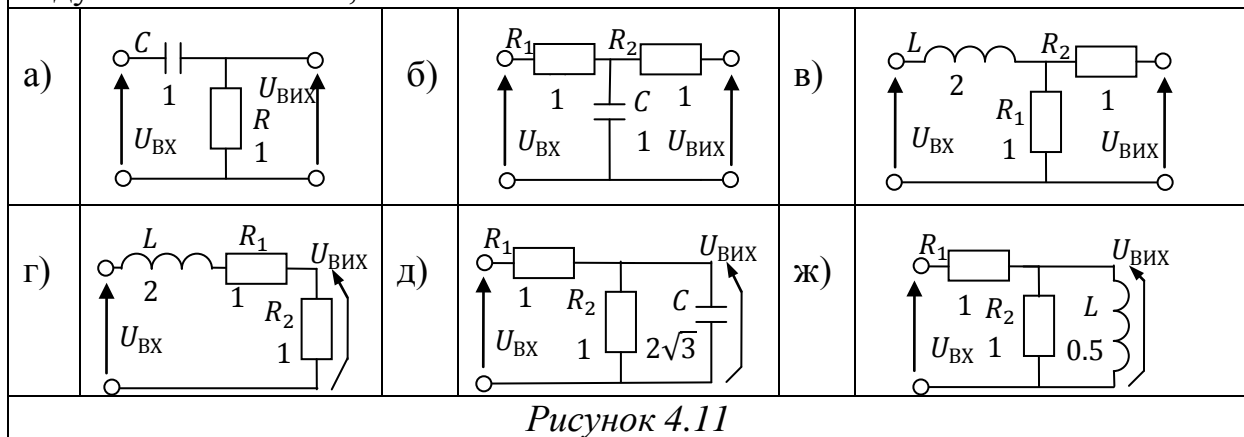


Рисунок 4.11

Відповідь: а)  $K_U(\omega) = j\omega/(1 + j\omega)$ ; б)  $K_U(\omega) = 1/(1 + j\omega)$ ;  
 в)  $K_U(\omega) = 1/(1 + 2j\omega)$ ; г)  $K_U(\omega) = 0.5/(1 + j\omega)$ ;  
 д)  $K_U(\omega) = 0.5/(1 + \sqrt{3}j\omega)$ ; ж)  $K_U(\omega) = 0.5j\omega/(1 + j\omega)$ .

**Задача 4.3.** У колах (рис. 4.12) визначити ємність  $C$ , при якій частота  $\omega = 1$  рад/мкс. Відомо, що: а) модуль коефіцієнта передачі за напругою є  $|K_U| = 1/2\sqrt{2}$ ; б) аргумент коефіцієнта передачі за напругою  $\varphi_{KU} = 30^\circ$ . Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, ємності в нФ.

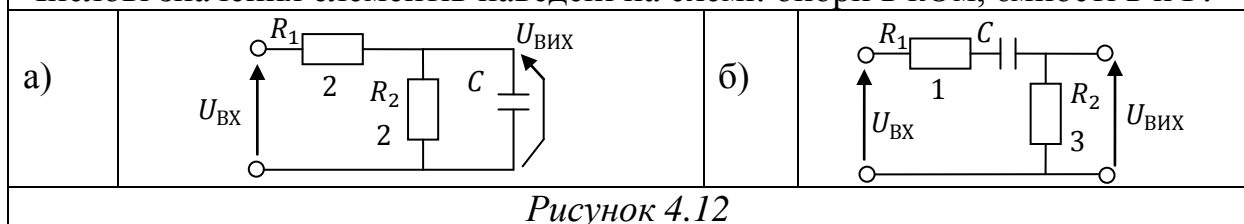
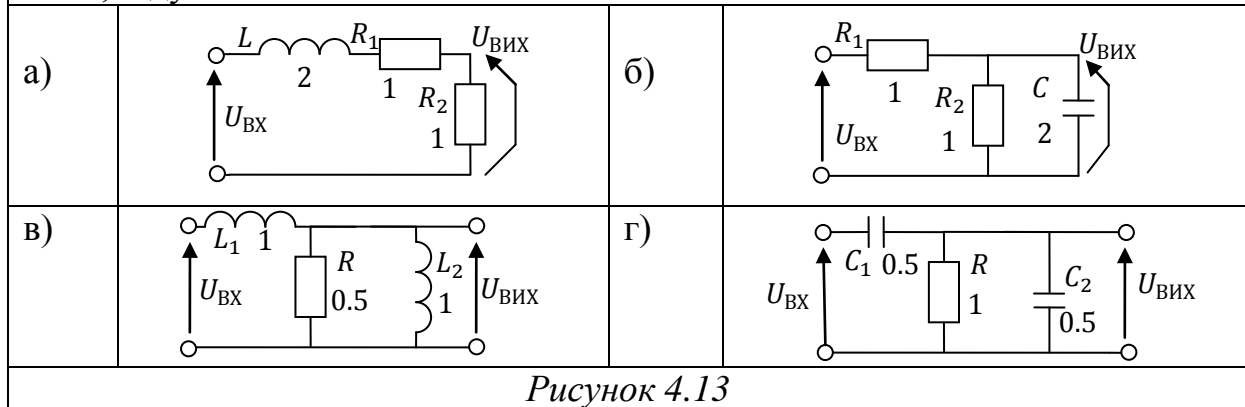


Рисунок 4.12

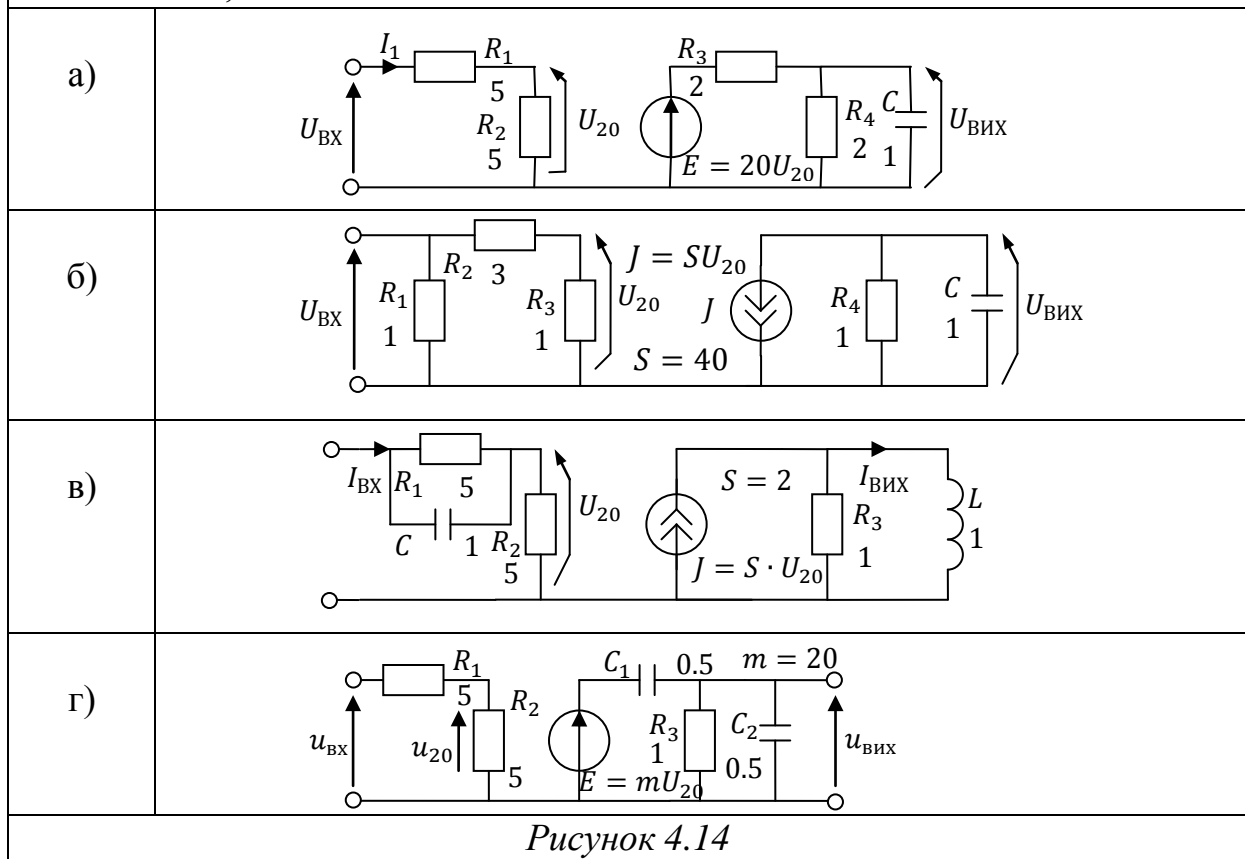
Відповідь: а)  $C = 1$  нФ; б)  $C = \sqrt{3}/4$  нФ.

**Задача 4.4.** У колах (рис. 4.13) визначити частоту  $\omega$ , на якій значення ФЧХ коефіцієнта передачі за напругою: а)  $\varphi_{KU} = -45^\circ$  (рис. 5.13 а, б, в);  $\varphi_{KU} = 45^\circ$  (рис. 5.13 г); Числові значення елементів: опори – кОм, ємності – нФ, індуктивності – мГн.



Відповідь: а)  $\omega = 1$  рад/мкс; б)  $\omega = 1$  рад/мкс; в)  $\omega = 1$  рад/мкс;  
г)  $\omega = 1$  рад/мкс.

**Задача 4.5.** У колах (рис. 4.14) знайти коефіцієнт передачі (рис. 4.14 а, б, г – за напругою, в – за струмом), побудувати його АЧХ та ФЧХ. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, ємності в нФ, індуктивності в мГн,  $S$  – мА/В.



Відповідь: а)  $K_U(\omega) = 5/(1 + j\omega)$ ; б)  $K_U(\omega) = -10/(1 + j\omega)$ ;  
в)  $K_I(\omega) = 10/(1 + j\omega)$ ; г)  $K_U(\omega) = 5j\omega/(1 + j\omega)$ .

**Задача 4.6.** У колі (рис. 4.15) знайти:  
 а) коефіцієнт передачі за напругою  $K_u = U_{23}/U_{10}$ ,  $S = 10$  мА/В; б) за якого значення параметру  $S$  коефіцієнт передачі за напругою  $K_u = \frac{U_{23}}{U_{10}} = -1/5$ . Числові значення елементів кола подані на схемі: опори в кОм.

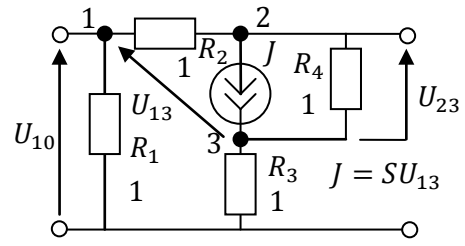
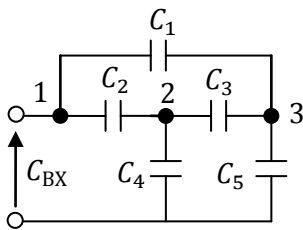


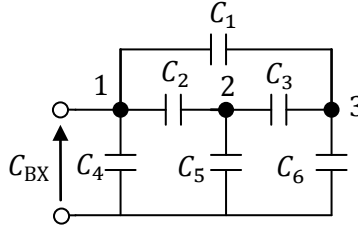
Рисунок 4.15

Відповідь: а)  $K_u = -9/13$ ; б)  $S = 2$  мА/В.

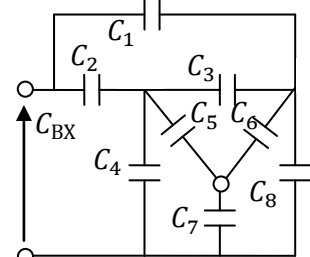
**Задача 4.7.** У колах (рис. 4.16) знайти вхідну еквівалентну ємність  $C_{BX}$ , якщо  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = C$ .



а)



б)



в)

Рисунок 4.16

Відповідь: а)  $C_{BX} = C$ ; б)  $C_{BX} = 2C$ ; в)  $C_{BX} = 80C/19$ .

## 4.2.2. Прості чотириполюсники

**Задача 4.8.** У колах (рис. 4.17) знайти коефіцієнт передачі: а) за напругою; б) за струмом. Побудувати АЧХ та ФЧХ. Числові значення: опори в кОм, ємності в нФ, індуктивність в мГн.

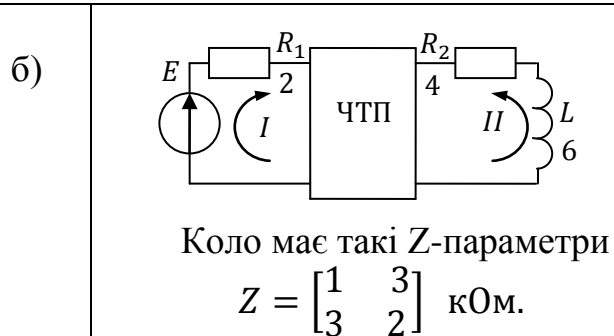
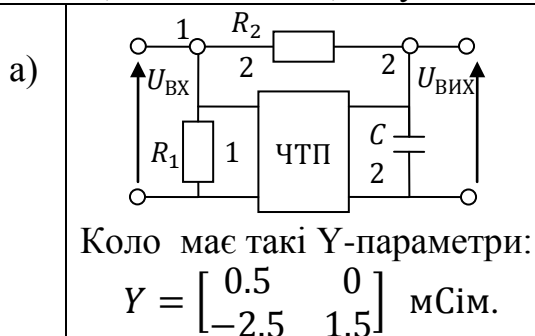


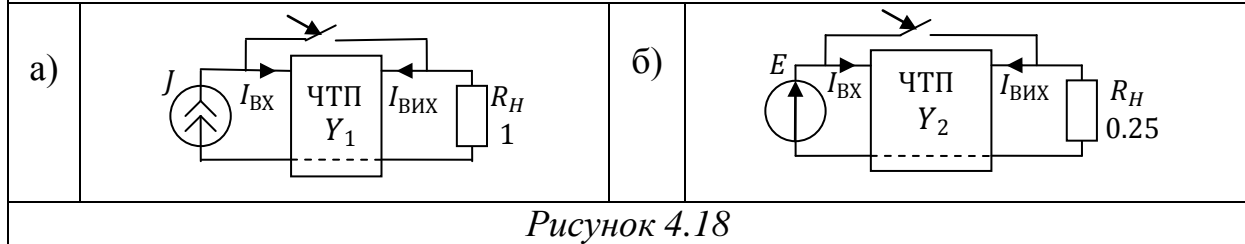
Рисунок 4.17

Відповідь: а)  $K_u = 3/(2 + 2j\omega)$ ; б)  $K_I = -1/(2 + 2j\omega)$ .

**Задача 4.9.** У колах (рис. 4.18) визначити величину джерела після замикання ключа. Y-параметри чотириполіусників ЧТП

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ мСім}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \text{ мСім}.$$

Всі опори в кОм, струми – мА, напруги – В. Потужність  $P_{\text{СП}} = 16 \text{ мВт}$ .



Відповідь: а)  $J = 8 \text{ мА}$ ; б)  $E = 1 \text{ В}$ .

**Задача 4.10.** Знайти вхідний опір кола (рис. 4.19).

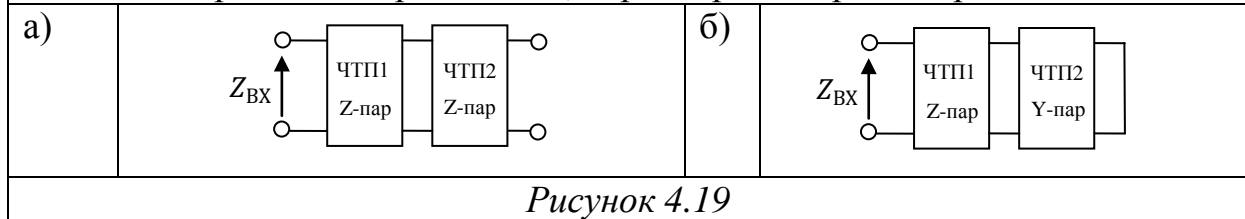
а) Z-параметри кожного чотириполіусника (рис. 5.17 а) є

$$Z = \begin{bmatrix} 1 + 2j & 1 \\ 4j & 4 + 3j \end{bmatrix} \text{ кОм};$$

б) Z- та Y-параметри чотириполіусників (рис. 4.19 б) є

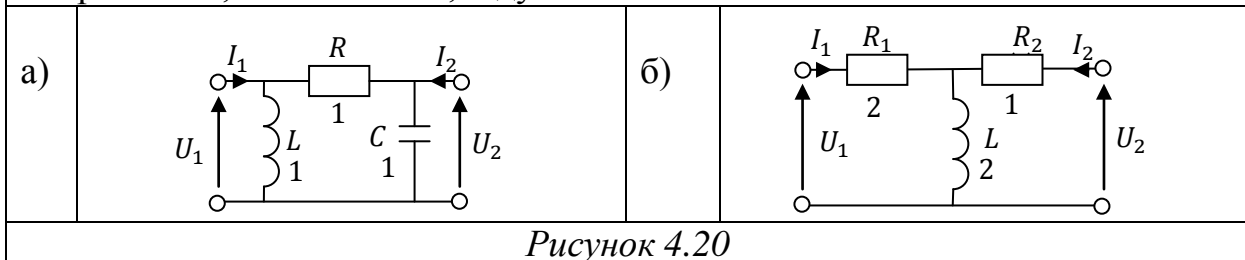
$$Z = \begin{bmatrix} 1 + 2j & -1 \\ 20 & 2 \end{bmatrix} \text{ кОм}, \quad Y = \begin{bmatrix} -0,5j & -0,01 \\ 15 & 2 \end{bmatrix} \text{ мСім}.$$

Режим роботи – гармонічний, параметри виміряні на робочі частоті.



Відповідь: а)  $Z_{\text{ВХ}} = \sqrt{73}e^{j69.4^\circ}/5 \text{ кОм}$ ; б)  $Z_{\text{ВХ}} = \sqrt{45}e^{-j26.6^\circ} \text{ кОм}$ .

**Задача 4.11.** У колі на частоті  $\omega = 10^6 \text{ рад/с}$  знайти Z – , h – , A – параметри (рис. 4.20 а) та Y – , A – параметри (рис. 4.20 б). Числові значення: опори в кОм, ємності в нФ, індуктивність в мГн..



Відповідь: а)  $Z_{11} = \sqrt{2}e^{j45^\circ}$ ,  $Z_{12} = 1$ ,  $Z_{21} = 1$ ,  $Z_{22} = \sqrt{2}e^{-j45^\circ}$ ;

$h_{11} = e^{j45^\circ}/\sqrt{2}$ ,  $h_{12} = e^{j45^\circ}/\sqrt{2}$ ,  $h_{21} = e^{-j135^\circ}/\sqrt{2}$ ,  $h_{22} = e^{j45^\circ}/\sqrt{2}$ ;

в)  $A_{11} = \sqrt{2}e^{j45^\circ}$ ,  $A_{12} = 1e^{j180^\circ}$ ,  $A_{21} = 1e^{j0^\circ}$ ,  $A_{22} = \sqrt{2}e^{j135^\circ}$ ;

б)  $Y_{11} = 0.35e^{-j8.13^\circ}$ ,  $Y_{12} = Y_{21} = 0.32e^{-j161.6^\circ}$ ,  $Y_{22} = 0.45e^{-j26.5^\circ}$ ;

$A_{11} = \sqrt{2}e^{-j45^\circ}$ ,  $A_{12} = \sqrt{10}e^{-j161.6^\circ}$ ,  $A_{21} = 0.5e^{-j90^\circ}$ ,  $A_{22} = \sqrt{1.25}e^{j153.4^\circ}$ .

**Задача 4.12.** У колах на частоті  $\omega = 10^6$  рад/с знайти  $Y$ -параметри (рис. 4.21 а, б),  $h$ -параметри (рис. 4.21 в),  $A$ - та  $B$ -параметри (рис. 4.21 г). Числові значення елементів: опори в кОм, індуктивності в мГн, взаємодукція в мГн. Відповідь надати у показниковій формі.

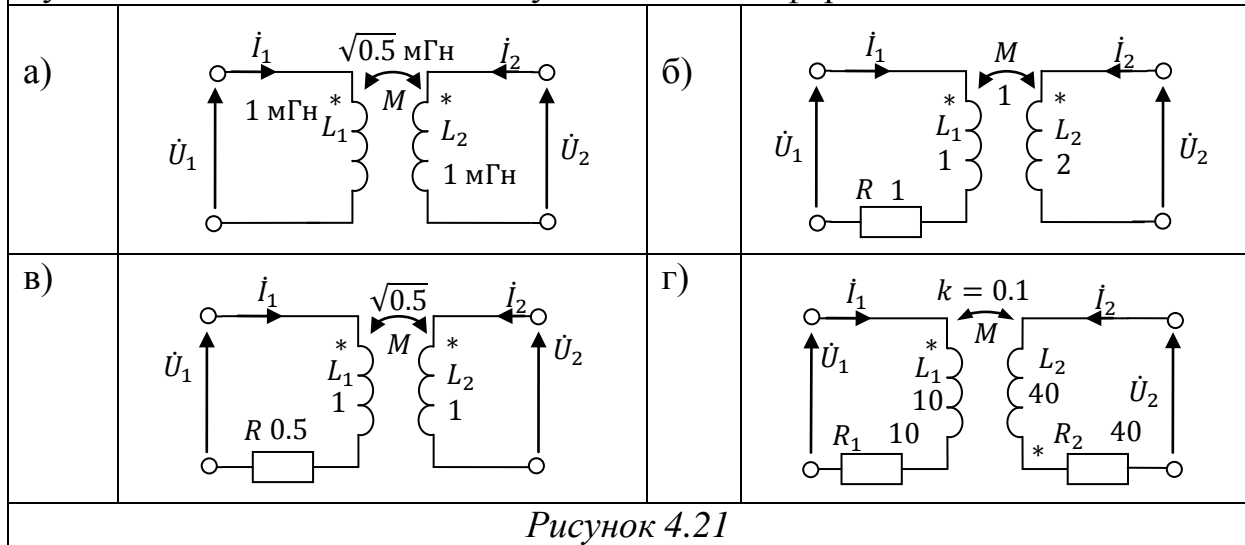


Рисунок 4.21

Відповідь: а)  $Y_{11} = 2e^{-j90^\circ}$ ,  $Y_{12} = \sqrt{2}e^{j90^\circ}$ ,  $Y_{21} = \sqrt{2}e^{j90^\circ}$ ,  $Y_{22} = 2e^{-j90^\circ}$ ;

б)  $Y_{11} = 2e^{-j26.5^\circ}/\sqrt{5}$ ,  $Y_{12} = e^{j206.6^\circ}/\sqrt{5}$ ,  $Y_{21} = e^{j206.6^\circ}/\sqrt{5}$ ,  
 $Y_{22} = \sqrt{2}e^{-j71.6^\circ}/\sqrt{5}$ .

в)  $h_{11} = e^{j45^\circ}/\sqrt{2}$ ,  $h_{12} = \sqrt{0.5}$ ,  $h_{21} = \sqrt{0.5}e^{j180^\circ}$ ,  $h_{22} = e^{-j90^\circ}$ .

г)  $A = 5\sqrt{2}e^{j135^\circ}$ ,  $B = 400e^{-j0.3^\circ}$ ,  $C = 0.5e^{j90^\circ}$ ,  $D = 20\sqrt{2}e^{-j45^\circ}$ ;

$B_{11} = 20\sqrt{2}e^{j135^\circ}$ ,  $B_{12} = 400e^{-j0.3^\circ}$ ,  $B_{21} = 0.5e^{j90^\circ}$ ,  $B_{22} = 5\sqrt{2}e^{-j45^\circ}$ .

**Задача 4.13.** У колах (рис. 4.22) визначити значення параметра  $Z_{11}$  чотирьохполосника у виділеній частині схеми. Джерела  $E = mU_{ab}$ ,  $J = S \cdot U_{ab}$  є керованими. Числові значення елементів кола: опір в кОм,  $S$  – мА/В. Відповідь надати в кОм.

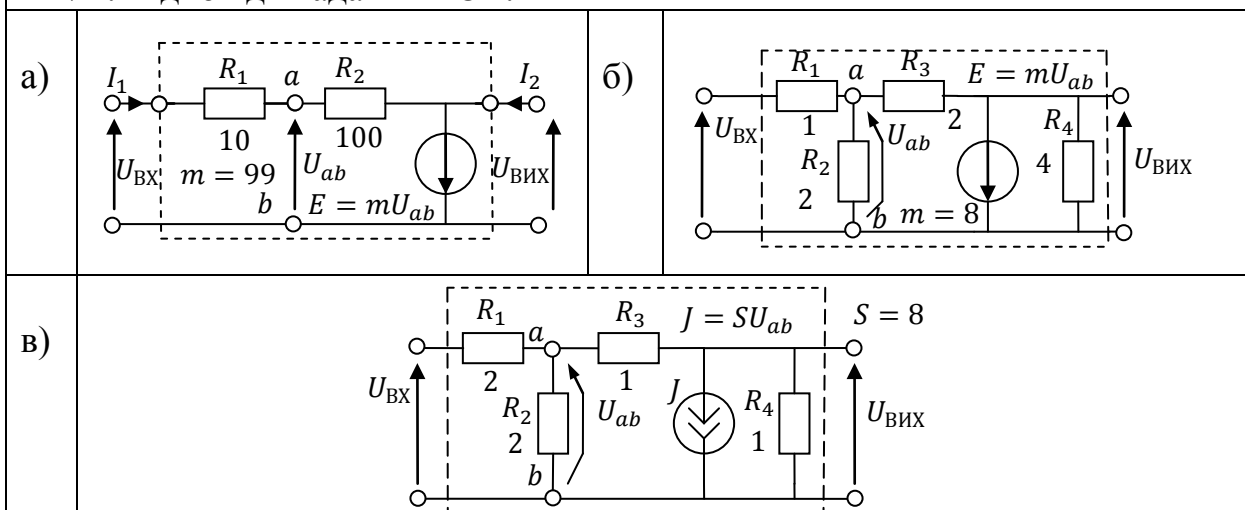


Рисунок 4.22

Відповідь: а)  $Z_{11} = 11$  кОм; б)  $Z_{11} = 1.2$  кОм; в)  $Z_{11} = 2.2$  кОм.

## 4.2.3. Олімпіадні задачі

**Задача 4.14\*\*\***. У колах (рис. 4.23), після завершення перехідних процесів, визначити: а) струм, що протікає через індуктивність  $L_2$  та величину напруги на ємності; б) величину індуктивності  $L_2$ , якщо через неї буде протікати струм  $I_{L2} = 2$  мА. Струми та напруги на всіх компонентах схеми в момент замикання ключа дорівнюють нулю. Всі опори в кОм, ємності в нФ, індуктивності в мГн, напруга в В.

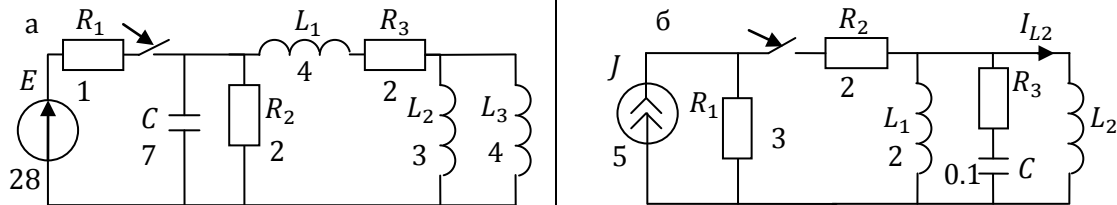


Рисунок 4.23

Відповідь: а)  $U_C(0) = 14$  В,  $I_{L2}(0) = 4$  мА; б)  $L_2 = 1$  мГн.

**Задача 4.15\*\*\***. У колі (рис. 4.24) визначити яка величина заряду на ємності  $3C$  встановиться після завершення перехідного процесу, якщо при цьому заряд на ємності  $C = 1$  мФ становить 25 мКл. Схема знаходиться при нульових початкових умовах.

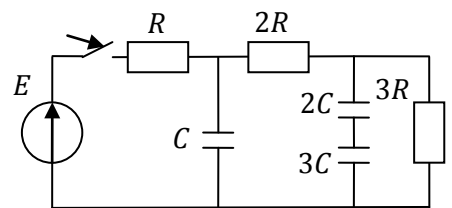


Рисунок 4.24

Відповідь:  $q_{3C} = 18$  мКл.

**Задача 4.16\*\*\***. У колі (рис. 4.25) визначити яка частина енергії, яка накопичується усіма ємностями після закінчення перехідного процесу, буде накопичена на ємності  $C_6$ . До замикання ключа усі ємності розряджені. Після замикання ключа відбуватиметься процес заряджання ємностей. Опори в кОм, ємності в мкФ, напруги в В.

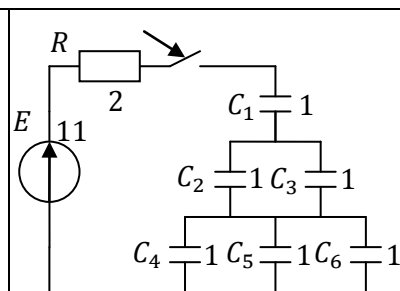


Рисунок 4.25

Відповідь:  $\eta = 2/33$ .

**Задача 4.17\*\*\***. У колі (рис. 4.26) визначити, яка максимальна потужність виділиться у опори  $R_2$ . У режимі короткого замикання на виході:  $K_I = 4$ ,  $Z_{BX} = 1$  кОм. У режимі холостого ходу на виході:  $K_U = 5$ ,  $Z_{BX} = 2$  кОм.

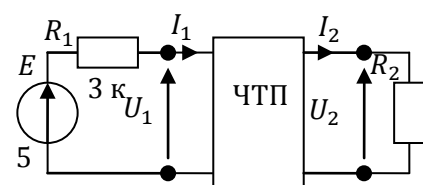


Рисунок 4.26

Відповідь:  $P_2 = 12.5$  мВт.

**Задача 4.18\*\*\*.** У колі (рис. 4.27) якщо на вхід підключити ідеальне джерело струму, то  $R_{ВХ} = 4$  кОм. Якщо те ж джерело підключити на вхід системи, то її  $R_{ВІХ} = 5$  кОм. Підключивши на вихід системи ідеальне джерело напруги, отримаємо  $R_{ВХ} = 1$  кОм. Яким буде вхідний опір кола  $R_{ВХ}$ , якщо на її вихід підключити  $R_H = 5$  кОм.

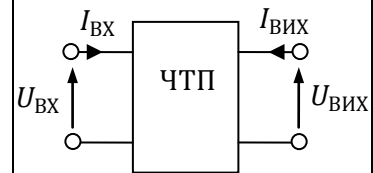


Рисунок 4.27

Відповідь:  $R_{ВХ} = 2.5$  кОм.

**Задача 4.19\*\*\*.** У лінійному чотириполіуснику (рис. 4.28) виміри струмів та напруг виконуються ідеальними приладами. Чотириполіусник немає незалежних джерел. Визначити показання амперметра. Всі опори в кОм, ємності в нФ, індуктивності в мГн, напруги в В.

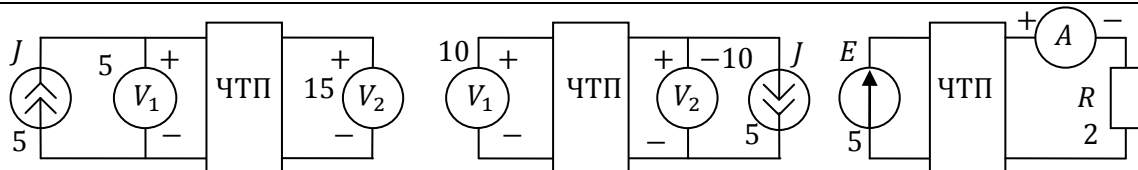


Рисунок 4.28

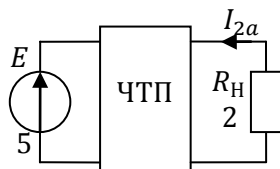
Відповідь:  $I_A = 7.5$  мА.

**Задача 4.20\*.** У колі (рис. 4.29) визначити опір  $R_{\Gamma}$ . Струми у колах пов'язані  $\dot{I}_{2b} = I_{2a} - 1$ . Z-параметри чотириполіусника становлять

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ кОм.}$$

На схемі: опори в кОм, напруга в В, струм в мА.

а)



б)

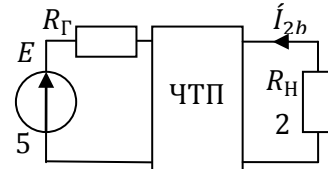


Рисунок 4.29

Відповідь:  $R_{\Gamma} = 1.25$  кОм.

**Задача 4.21\*.** У симетричному ЧТП (рис. 4.30) при замкненому ключі К  $I_{ВХ} = 1,6$  мА,  $I_{ВІХ} = 3,2$  мА. Знайти  $I_{ВХ}$  та  $I_{ВІХ}$  при розімкненому ключі К. Параметри елементів кола наведені на схемі: опори в кОм, напруга в В.

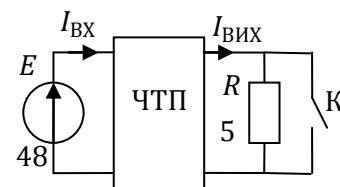


Рисунок 4.30

Відповідь:  $I_{ВХ} = 3$  мА,  $I_{ВІХ} = 1.2$  мА.



**Задача 4.22\*\*\***. У колі (рис. 4.31 а) визначити значення опору  $R_H$ , за якого на ньому виділиться найбільша потужність та розрахувати значення цієї потужності. Схема має лінійний триполіусник: 1 – вхідний, 2 – вихідний, 3 – спільний полюс триполіусника.

Y-параметри триполіусника (рис. 4.30 б)

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ мСім.}$$

На схемі: напруга в В, опори в кОм.

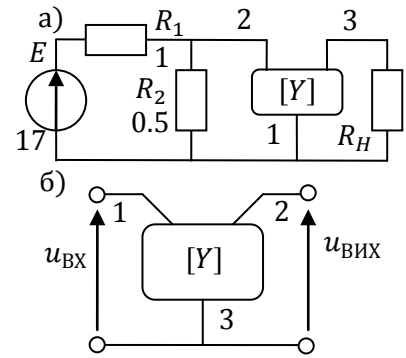


Рисунок 4.31

Відповідь:  $R_H = 5/17 \text{ кОм}$ ,  $P_{H.max} = 17/20 \text{ мВт}$ .

**Задача 4.23\*\*\***. Визначити напругу на опорі (рис. 4.32),  $R_H$  після замикання ключа. Y -параметри ЧТП 1 та Z -параметри ЧТП 2:

$$Y = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ мСім}; \quad Z = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \text{ кОм.}$$

На схемі: напруга в В, опори в кОм, струм в мА.

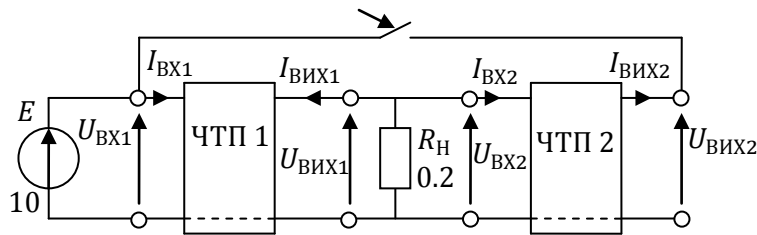


Рисунок 4.32

Відповідь:  $U_R = 2 \text{ В}$ .

**Задача 4.24\*\*\***. У колі (рис. 4.33) виходи двох однакових чотиріполюсників з'єднані каскадно і до них підключене навантаження з опором  $r_H$ . Визначити опір  $r_H$ , за якого навантаження розсіюватиме найбільшу потужність, та визначити значення цієї потужності. Напруга та струм ідеальних джерел є  $E = 4 \text{ В}$  та  $J = 0.2 \text{ А}$ . Матриця h-параметрів чотиріполюсника

$$[h] = \begin{bmatrix} 10 & 0.6 \\ 5 & -0.1 \end{bmatrix}.$$

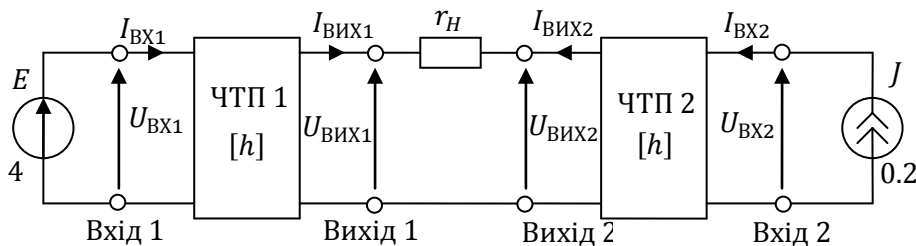


Рисунок 4.33

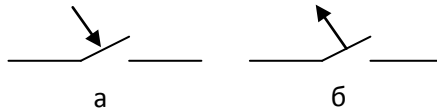
Відповідь:  $r_H = 12.5 \text{ Ом}$ ,  $P_{H.max} = 0.5 \text{ Вт}$ .

## 5. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ У ПРОСТИХ КОЛАХ

### 5.1. Короткі теоретичні відомості

**Перехідним процесом** називають процес, що виникає у електричному колі під час переходу кола від одного усталеного режиму до іншого.

Характер комутації (comutatie) або перемикання, на схемі вказується за допомогою ключа зі стрілкою (рис. 5.1).



*Рисунок 5.1 – Умовне зображення комутації*

Усталений режим визначається дією джерела енергії та обумовлений енергетичним станом кола. За наявності реактивних елементів перехід від одного усталеного режиму до іншого миттєво не відбувається.

У момент часу, що передуює комутації, струми та напруги позначають  $i(0-)$ ,  $u(0-)$ , відразу після комутації –  $i(0+)$ ,  $u(0+)$ , у момент комутації –  $i(0)$ ,  $u(0)$ .

#### **Закони комутації.**

*Перший закон комутації.* У будь-якій гілці з індуктивністю струм і магнітний потік у момент комутації стрибком змінитися не можуть, а починають змінюватись від тих значень, які вони мали безпосередньо до комутації

$$i_L(0-) = i_L(0+) = i_L(0), \quad (5.1)$$

$$\psi_L(0-) = \psi_L(0+) = \psi_L(0). \quad (5.2)$$

*Другий закон комутації.* У будь-якій гілці напруга і заряд на ємності у момент комутації стрибком змінитися не можуть, а починають змінюватися від тих значень, які б вони мали безпосередньо до комутації

$$u_C(0-) = u_C(0+) = u_C(0), \quad (5.3)$$

$$q_C(0-) = q_C(0+) = q_C(0). \quad (5.4)$$

**Класичний метод** аналізу полягає у тому, що для кола після комутації складається система рівнянь або рівняння на основі будь-яких методів аналізу електричних кіл та зводиться до лінійного неоднорідного диференційного рівняння відносно шуканих змінних

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t). \quad (5.5)$$

Відомо, що розв'язання такого рівняння можна представити у вигляді

$$u_C = \dot{u}_C + \ddot{u}_C = u_{C.\text{вим}} + u_{C.\text{вл}}, \quad (5.6)$$

де  $u_{C.\text{вим}}$  – власне розв'язання лінійного неоднорідного рівняння;  $u_{C.\text{вл}}$  – загальне розв'язання лінійного однорідного.

Складова  $u_{\text{С.ВЛ}}$  описує поведінку кола у відсутності джерела та називається вільною складовою, а  $u_{\text{С.ВИМ}}$  залежить від джерела та називається вимушеною складовою.

Вигляд вільної складової

$$x_{\text{ВЛ}}(t) = \sum_{i=1}^m A_i t^{k-1} e^{p_i t} + \sum_{k=m+1}^n A_k e^{p_k t}, \quad (5.7)$$

де  $p_1 = p_2 = \dots = p_m$ ,  $m < n$

Незалежними початковими умовами назвемо значення змінних струмів в індуктивностях і напруг на ємностях при  $t = 0$ , тобто ті величини, які у момент комутації не змінюються стрибком.

Характеристики перехідного процесу

**Стала часу кола** визначається коренями характеристичного рівняння

$$\tau = \frac{1}{|p|} = i_{\text{ВЛ}}(\tau) = i_{\text{ВЛ}}(0) e^{-1} = \frac{i_{\text{ВЛ}}(0)}{e} = \frac{A}{e}, \quad (5.8)$$

де  $|p|$  – це найменше за модулем корень характеристичного рівняння

Практично перехідний процес можна обмежити розглядом інтервалу часу, за межами якого вільний струм та напруга стають несуттєвими. (таблиця 5.1)

Таблиця 5.1

t	0	1τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$i_{\text{ВИМ}}, \%$	100	36.79	13.53	4.98	1.83	0.67

**Коефіцієнт загасання кола** – величина зворотна сталій часу кола

$$\alpha = \frac{1}{\tau}. \quad (5.9)$$

**Декремент загасання** – величина, що характеризує швидкість загасання розглянутих коливань і дорівнює відношенню напруг у момент часу  $t$  та  $t + T$

$$\Delta = \frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{u_1(t)}{u_1(t+T)} = \frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha(t+T)}} = e^{\alpha T}. \quad (5.10)$$

Декремент загасання є сталою величиною, що не залежить від часу, а залежить лише від параметрів кола  $R$ ,  $L$ ,  $C$ .

Часто швидкість загасання коливань характеризують натуральним логарифмом від декременту загасання

$$\delta = \ln(\Delta) = \ln(e^{\alpha T}) = \alpha \cdot T. \quad (5.11)$$

$\alpha$  – коефіцієнт згасання,  $T$  - період коливань.

Величину  $\delta$  називають *логарифмічним декрементом загасання*

**Операторний метод** розрахунку перехідних процесів полягає у тому, що використовується перетворення Лапласа, що дозволяє перенести розв'язання з області функції дійсної змінної  $t$  у область комплексної змінної  $p$ .

Пряме перетворення Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = L\{f(t)\}, \quad (5.12)$$

де  $f(t)$  – функція дійсної змінної  $t$  та визначається при  $t > 0$  (при  $t < 0$ ,  $f(t) = 0$ ).

Зворотнє перетворення Лапласа (the inverse Laplace transform)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\cdot\infty}^{\sigma+j\cdot\infty} F(p)e^{pt} dp = L^{-1}\{F(p)\}. \quad (5.13)$$

Функцію  $F(p)$  називають зображенням за Лапласом, а функцію  $f(t)$  – оригіналом. Отже, оригінал і зображення являють собою пари функцій  $f(t)$  і  $F(p)$  дійсної та комплексної змінної, зв'язаних між собою парою перетворень Лапласа.

При такому перетворенні операція диференціювання над функцією дійсної змінної  $f(t)$ , замінюється операцією множення на оператор  $p$  функції комплексної змінної  $F(p)$ . У свою чергу, операція інтегрування замінюється операцією ділення на оператор  $p$ .

### Властивості перетворення Лапласа

Диференціювання оригіналу при ненульових початкових умовах

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow pF(p) - f(0). \quad (5.14)$$

Інтегрування оригіналу

$$\int_0^t f(t) dt \leftrightarrow \frac{F(p)}{p} - \frac{F(0)}{p}. \quad (5.15)$$

Зміна масштабу (теорема подоби)

$$f(at) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right). \quad (5.16)$$

де  $a$  – постійний дійсний коефіцієнт.

Зсув в області дійсної змінної

$$f(t + t_0) = F(p)e^{pt_0}. \quad (5.17)$$

Зсув в області комплексній змінної

$$F(p \mp \lambda) = f(t)e^{\pm \lambda t}. \quad (5.18)$$

Згортка двох функцій відповідає добутку зображень

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^\infty f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^\infty f_1(t - \tau) \cdot f_2(\tau) d\tau \leftrightarrow \leftrightarrow F_1(p) \cdot F_2(p). \quad (5.19)$$

Напруг на індуктивності із властивості диференціювання оригіналу

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \rightarrow U_L(p) = pLI_L(p) - Li_L(0). \quad (5.20)$$

Виходячи з одержаного виразу можна зобразити операторну схему заміщення індуктивності (рис. 5.2).

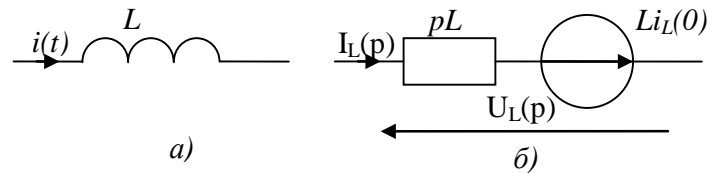


Рисунок 5.2

У операторній області індуктивність еквівалентна індуктивному опору зі значенням  $pL$  та джерелу напруги зі значенням  $Li_L(0)$ .

Напруг на ємності із властивості про інтегрування оригіналу

$$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \rightarrow U_C(p) = \frac{I_C(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p} \quad (5.21)$$

Виходячи з одержаних виразів можна зобразити операторну схему заміщення ємності (рис. 5.3)

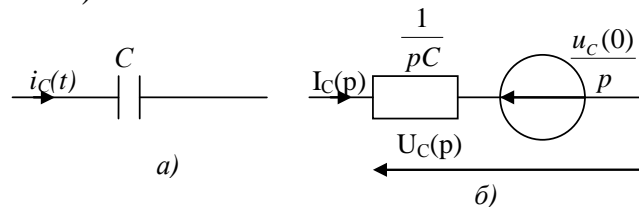


Рисунок 5.3

У операторній області ємність еквівалентна ємнісному опору зі значенням  $1/pC$  та джерелу напруги зі значенням  $u_C(0)/p$ .

**Теорема розкладання** використовується після одержання операторного розв'язання у вигляді відношення поліномів

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Теорема розкладання використовується, коли степінь поліному чисельника більше степеня поліному знаменника.

Якщо корені виразу знаменника дійсні, різні, то теорема розкладання записується у вигляді

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{p_k} F(p_k) = \sum_{k=1}^m \frac{F_1(p_k)}{\dot{F}_2(p_k)} e^{p_k t},$$

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{p - p_k} \rightarrow \sum_{k=1}^m A_k e^{p_k t},$$

$$\text{де } A_k = \left. \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_k) \right|_{p=p_k} = \left. \frac{F_1(p)}{\dot{F}_2(p)} \right|_{p=p_k}.$$

Отже,

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \dots + \frac{A_k}{p - p_k} + \dots + \frac{A_m}{p - p_m} + A_0,$$

де  $A_0$  - це відношення коефіцієнтів при старших степенях.

Вираз  $F(p)$  у часовій області відповідає

$$f(t) = A_1 e^{p_1 t} + \dots + A_k e^{p_k t} + \dots + A_m e^{p_m t} + A_0 \delta(t).$$

Якщо корені знаменника дійсні, рівні, то теорема розкладання

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{p_k} F(p_k) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(n_k - 1)!} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \frac{F_1(p_k)}{F_2(p_k)} e^{p_k t} (p - p_k).$$

$$F(p) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(p - p_k)^n} \rightarrow f(t) = A_k \frac{t^n}{(n - 1)!} e^{p_k t}, \quad A_k = \left. \frac{F_1(p)}{\dot{F}_2(p)} \right|_{p=p_k}.$$

Якщо корені виразу знаменника комплексно-спряжені, то теорема розкладання записується у вигляді

$$f(t) = 2|A_1| e^{\operatorname{Re}(p_1)t} \cos(\operatorname{Im}(p_1)t + \arg(A_1)), \quad (5.22)$$

причому  $A_1 \rightarrow p_1 = -\alpha + jb$ .

У виразі введені позначення

$$|A_i| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi_k = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) = \varphi = \arg(A_i),$$

$$\varphi_{k+1} = \arctg\left(\frac{b}{-a}\right) = -\arctg\left(\frac{b}{a}\right) = -\varphi.$$

Графічне зображення оригіналу для пари комплексно-спряжених коренів (рис. 5.4).

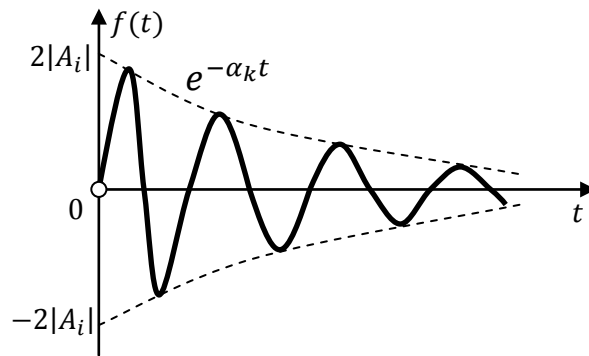


Рисунок 5.4

**Функція Хевісайда** або по-іншому функція одиничної сходинки  $1(t)$  визначається у такий спосіб (рис. 5.5)

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \quad (5.23)$$

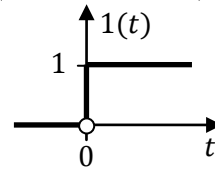


Рисунок 5.5

**Функція Дірака** – це імпульс нескінченно малої тривалості з нескінченно великою амплітудою (рис. 5.6). Площа, обмежена цим імпульсом, дорівнює одиниці. Тому цей імпульс ще називають одиничним імпульсом.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = t_0; \\ 0, & t \neq t_0. \end{cases} \quad (5.24)$$

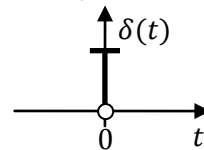


Рисунок 5.6

**Імпульсною характеристикою** називається реакція кола (напруга або струм) на виході при дії на вході кола дельта-функції  $\delta(t)$  (струму або напруги, рис. 6.7).

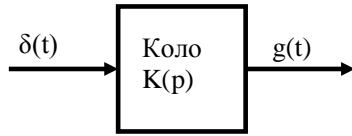


Рисунок 5.7

Оригінал імпульсної характеристики  $g(t)$  знаходимо за допомогою зворотного перетворення Лапласа

$$g(t) = L^{-1}\{K(p)\}. \quad (5.25)$$

**Перехідною характеристикою** називається реакція кола (струм або напруга) на виході при дії на вході функції Хевісайда (струму або напруги, рис. 6.8).

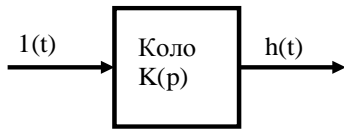


Рисунок 5.8

Оригінал

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{K(p)}{p}\right\}.$$

Зв'язок між імпульсною та перехідною характеристиками

$$h(t) = \int g(t) dt; \quad g(t) = \frac{d}{dt} h(t).$$

У колі (рис. 5.9) можна визначити вихідну напругу або струму через часові характеристики, якщо відома вхідна напруга чи струм.

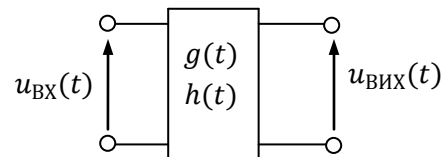


Рисунок 5.9

Вихідна напруга через імпульсну та перехідну характеристики

$$\begin{aligned} u_{\text{ВІХ}}(t) &= u_{\text{ВІХ}}(t) * g(t) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{ВІХ}}(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{ВІХ}}(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau; \\ u_{\text{ВІХ}}(t) &= \dot{u}_{\text{ВІХ}}(t) * h(t) = u_{\text{ВІХ}}(0) \cdot h(t) + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{u}_{\text{ВІХ}}(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = u_{\text{ВІХ}}(0) \cdot h(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{u}_{\text{ВІХ}}(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

### Стійкість схемних функцій.

Оскільки дія змінюється за законом  $f(t) = E_m e^{-t\alpha}$ , то схема буде нестійкою, коли  $\alpha < 0$ , оскільки реакція кола буде необмежено збільшуватися, що приведе до виходу із ладу кола. Для аналізу стійкості необхідно визначити розміщення коренів характеристичного рівняння на комплексній площині.

Схемна функція буде нестійкою, коли корені знаменника будуть знаходитися у правій площині комплексної площини (рис. 5.10). В іншому випадку вона буде нестійка.

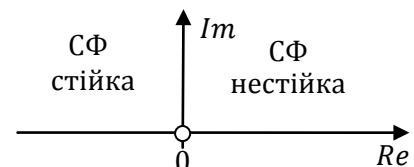


Рисунок 5.10

## 5.2. Задачі для самостійного розв'язання

### 5.2.1. Операторний метод у простих колах

**Задача 5.1.** У колах (рис. 5.10) операторним методом знайти струм  $i(t)$  або напругу  $u_j(t)$ . Побудувати їх графіки. Числові значення елементів: струми – мА, опори – кОм, індуктивності – мГн, ємності – нФ.

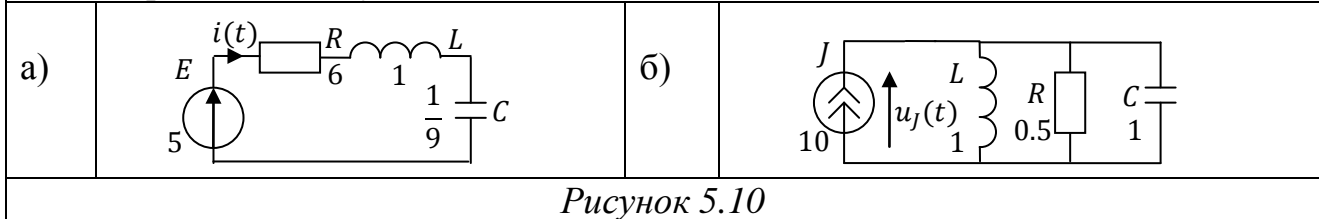


Рисунок 5.10

Відповідь: а)  $i_L(t) = 5te^{-3t}$ ; б)  $u_j(t) = 10te^{-t}$ .

**Задача 5.2.** У колах (рис. 5.11) операторним методом знайти напругу та струм на реактивності. Побудувати їх графіки. Числові значення елементів на схемі: струми – мА, опори – кОм, індуктивності – мГн, ємності – нФ.

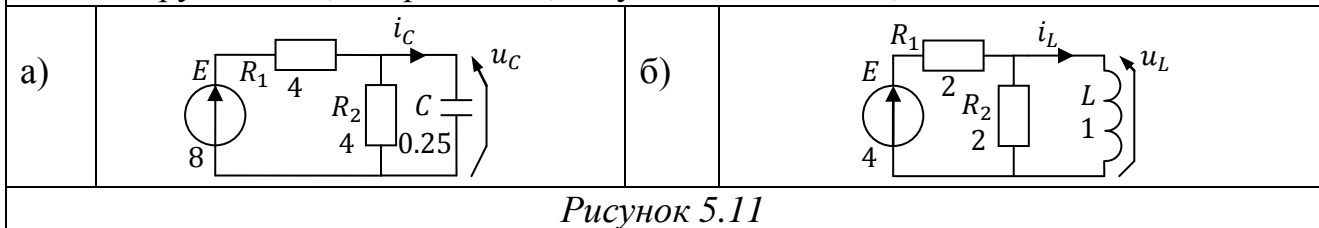


Рисунок 5.11

Відповідь: а)  $i_c(t) = 2e^{-2t}$  мА,  $u_c(t) = 0.25 - 0.25e^{-2t}$  В;  
 б)  $u_L(t) = 2e^{-t}$  В,  $i_L(t) = 2 - 2e^{-t}$  мА;

**Задача 5.3.** У колах (рис. 5.12) операторним методом розрахувати струм та напругу на індуктивності або ємності. Побудувати їх графіки. Числові значення на схемі: струми – мА, напруга – В, опори – кОм, індуктивності – мГн, ємності – нФ. Для джерел  $t \geq 0$ .

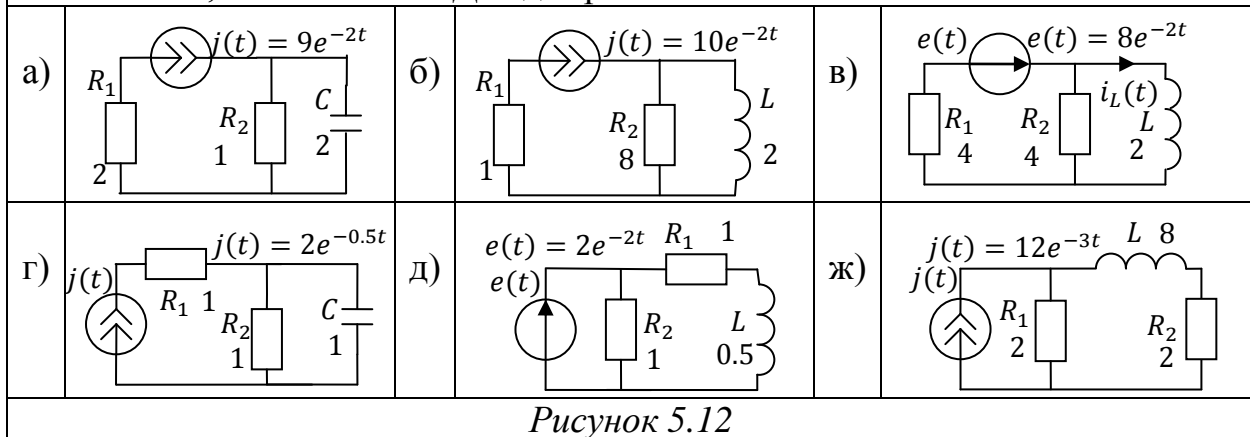


Рисунок 5.12

Відповідь: а)  $u_c(t) = -3e^{-2t} + 3e^{-0.5t}$  В,  $i_c(t) = 12e^{-2t} - 3e^{-0.5t}$  мА;  
 б)  $i_L(t) = 20e^{-4t} - 20e^{-2t}$  мА,  $u_L(t) = 80e^{-2t} - 160e^{-4t}$  В;  
 в)  $i_L(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$  мА,  $u_L(t) = 8e^{-2t} - 4e^{-t}$  В;



- г)  $i_C(t) = 4e^{-t} - 2e^{-0.5t}$  мА,  $u_C(t) = 4e^{-0.5t} - 4e^{-t}$  мА;  
 д)  $u_L(t) = -4te^{-2t} + 2e^{-2t}$  В,  $i_L(t) = 4te^{-2t}$  мА;  
 ж)  $i_L(t) = 6e^{-2t} - 6e^{-3t}$  мА,  $u_L(t) = 144e^{-2t} - 96e^{-3t}$  В.

**Задача 5.4.** У колах (рис. 5.13) операторним методом визначити струм  $i(t)$ . Числові значення елементів на схемі: напруга – В, струми – мА, опори – кОм, ємності – нФ, індуктивності – мГн. Вхідний струм або напруга:  $j(t) = 0.5te^{-2t} \cdot 1(t)$ , мА (рис. 6.12 а),  $j(t) = [e^{-2t}] \cdot 1(t)$  мА (рис. 6.12 б),  $j(t) = 2e^{-2t} \cdot 1(t)$ , мА (рис. 6.12 в);  $e(t) = 16e^{-2t} \cdot 1(t)$  В (рис. 6.12 г).

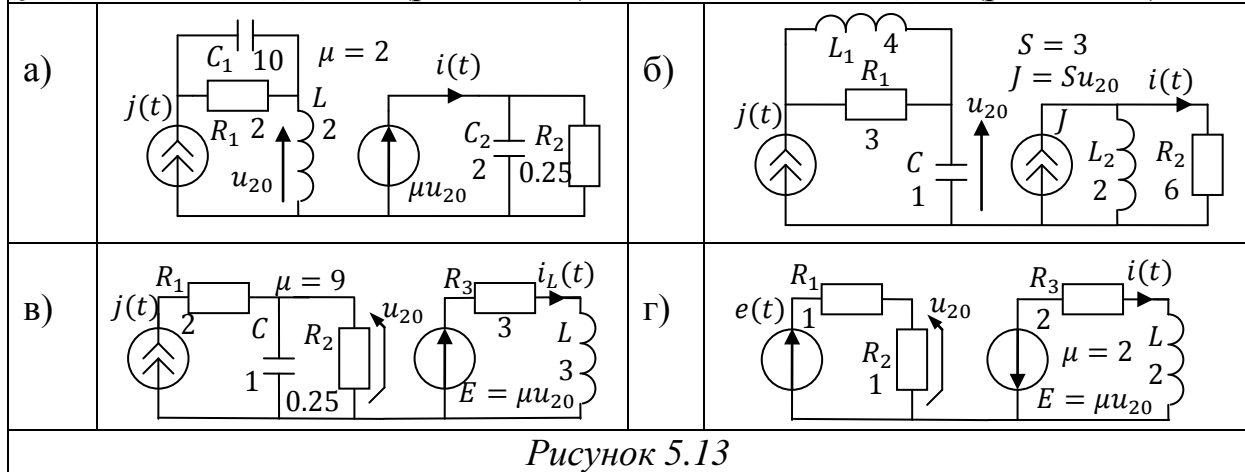


Рисунок 5.13

- Відповідь: а)  $i(t) = 4\delta(t) - 8e^{-2t}$  мА; б)  $i(t) = 3e^{-2t} - 3e^{-3t}$  мА;  
 в)  $i_L(t) = e^{-4t} - 3e^{-2t} - 2e^{-t}$  мА; г)  $i(t) = 6e^{-t} - 6e^{-2t}$  мА.

### 5.2.2. Часові характеристики, вихідні струми та напруги

**Задача 5.5.** У колах (рис. 5.14) знайти перехідну та імпульсну характеристики коефіцієнту передачі за напругою, вихідну напругу  $u_{\text{вих}}(t)$ . Побудувати їх графіки. Вхідна напруга тривалістю  $\tau_{\text{имп}} = 4$  мкс та амплітудою  $U_m = 1$  В. Числові значення наведені на схемі: напруга – В, струми – мА, опори – кОм, ємності – нФ, індуктивності – мГн.

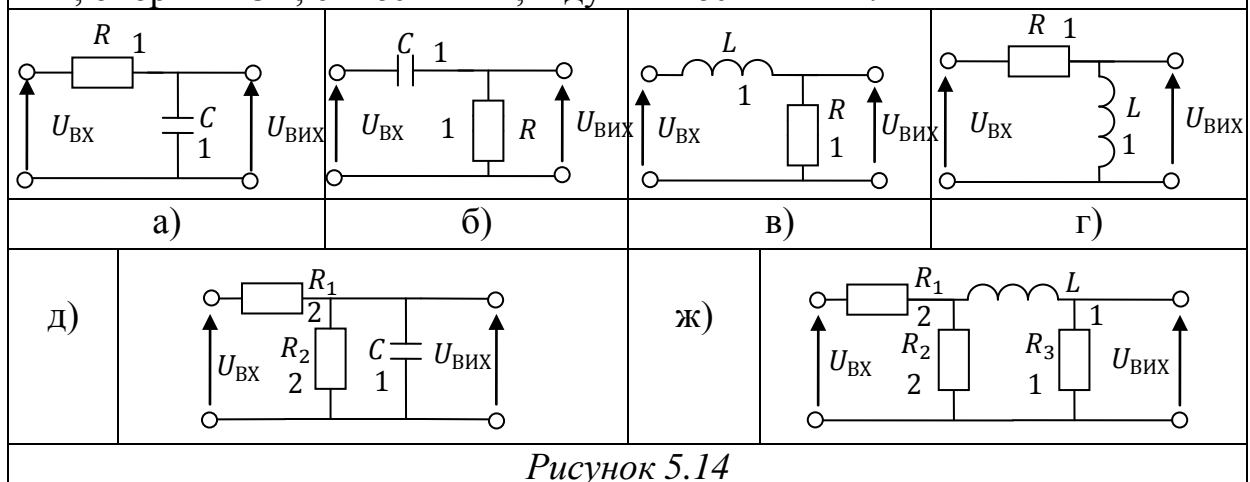


Рисунок 5.14

- Відповідь: а)  $g(t) = e^{-t}$ ,  $h(t) = 1 - e^{-t}$ ; б)  $g(t) = \delta(t) - e^{-t}$ ,  $h(t) = e^{-t}$ ;  
 в)  $g(t) = e^{-t}$ ,  $h(t) = 1 - e^{-t}$ ; г)  $g(t) = \delta(t) - e^{-t}$ ,  $h(t) = e^{-t}$ ;  
 д)  $g(t) = 0.5e^{-2t}$ ,  $h(t) = 0.5(1 - e^{-t})$ ;

$$\text{ж) } g(t) = 0.5e^{-2t}, \quad h(t) = 0.25 - 0.25e^{-2t};$$

$$\text{для всіх пунктів: } u_{\text{вих}}(t) = U_m[h(t) \cdot 1(t) - h(t - 4) \cdot 1(t - 4)] \text{ В.}$$

**Задача 5.6.** У колах (рис. 5.15) знайти перехідну та імпульсну характеристики коефіцієнту передачі за струмом, вихідний струм  $i_{\text{вих}}(t)$ . Побудувати їх графіки. Вхідний струм тривалістю  $\tau_{\text{імп}} = 3$  мкс та амплітудою  $I_m = 2$  мА. Числові значення наведені на схемі: напруга – В, струми – мА, опори – кОм, ємності – нФ, індуктивності – мГн.

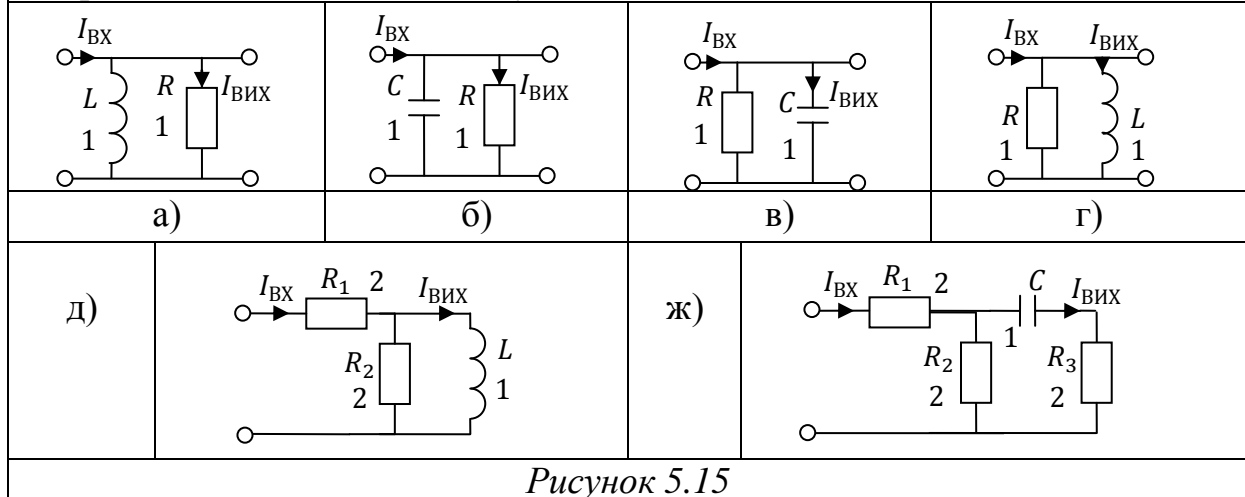


Рисунок 5.15

Відповідь: а)  $g(t) = \delta(t) - e^{-t}$ ,  $h(t) = e^{-t}$ ; б)  $g(t) = e^{-t}$ ,  $h(t) = 1 - e^{-t}$ ;

в)  $g(t) = \delta(t) - e^{-t}$ ,  $h(t) = e^{-t}$ ; г)  $g(t) = e^{-t}$ ,  $h(t) = 1 - e^{-t}$ ;

д)  $g(t) = 2e^{-2t}$ ,  $h(t) = 1 - e^{-2t}$ ;

ж)  $g(t) = 0.5\delta(t) - 0.125e^{-0.25t}$ ,  $h(t) = 0.5e^{-0.25t}$ ;

для всіх пунктів:  $i_{\text{вих}}(t) = I_m[h(t) \cdot 1(t) - h(t - 3) \cdot 1(t - 3)]$  мА.

**Задача 5.7.** У колі (рис. 5.16 а) розрахувати параметри кола так, щоб «сколювання» вершин прямокутного імпульсу не перевищувало 10 %, тривалість імпульсу  $\tau_{\text{імп}} = 10$  мкс. У колі (рис. 5.16 б) розрахувати параметри кола так, щоб «затягування» фронтів прямокутного імпульсу  $\tau_{\text{імп}} = 10$  мкс не перевищувало 1 мкс. Числові значення на схемі: напруга – В, струми – мА, опори – кОм, ємності – нФ, індуктивності – мГн.

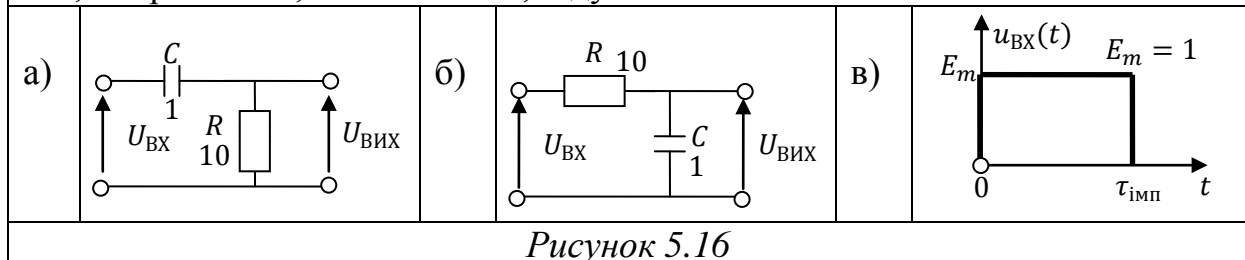


Рисунок 5.16

Відповідь:  $\tau = 95$  мкс,  $\tau = 0.434$  мкс.

**Задача 5.8.** У колі (рис. 5.17) визначити напругу  $u_{\text{ВІХ}}(t)$ . Вхідна напруга та часові характеристики: а)  $u_{\text{ВІХ}}(t) = t \cdot 1(t)$  В,  $h(t) = 10e^{-2t}1(t)$  б)  $u_{\text{ВІХ}}(t) = 6e^{-5t} \cdot 1(t)$  В,  $g(t) = 5e^{-3t}1(t)$ . Числові значення на схемі: напруга – В, струми – мА, опори – кОм.

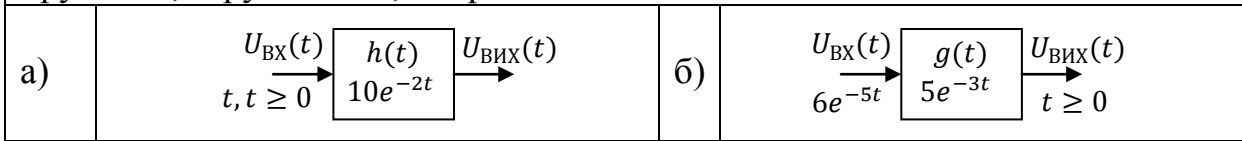


Рисунок 5.17

Відповідь: а)  $u_{\text{ВІХ}}(t) = 5 - 5e^{-2t}$  В; б)  $u_{\text{ВІХ}}(t) = 15e^{-3t} - 15e^{-5t}$  В.

**Задача 5.9.** У колі (рис. 5.18) визначити часові характеристики. Числові значення на схемі: напруга – В, струми – мА, опори – кОм.

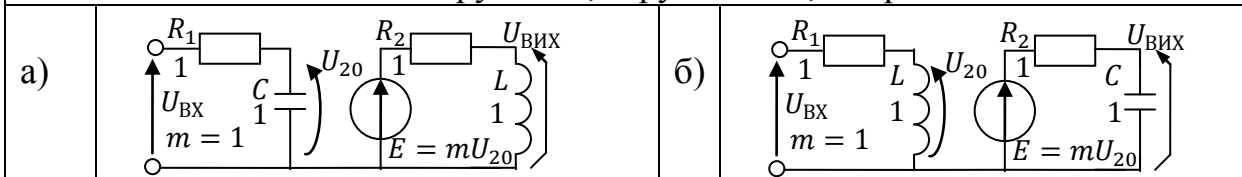


Рисунок 5.18

Відповідь: а)  $h(t) = te^{-t}$ ,  $g(t) = e^{-t} - te^{-t}$ ;  
 б)  $h(t) = 2te^{-2t}$ ,  $g(t) = 4e^{-2t} - 8te^{-2t}$ .

**Задача 5.10.** У колах (рис. 5.19) знайти перехідну та імпульсну характеристики коефіцієнту передачі за напругою, напругу  $u_{\text{ВІХ}}(t)$ . Побудувати їх графіки. Вхідна напруга  $u_{\text{ВІХ}}(t)$  має тривалості  $\tau_{\text{імп}} = 3$  мкс та  $\tau_{\text{імп}} = 10$  мкс, амплітудою  $E_m = 1$  В. Числові значення наведені на схемі: напруга – В, струми – мА, опори – кОм, ємності – нФ, індуктивності – мГн.

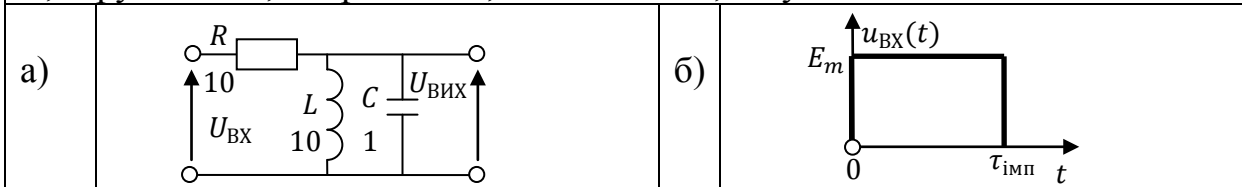


Рисунок 5.19

Відповідь:  $g(t) = 0.101e^{-0.05t} \cos(0.312t + 9.1^\circ)$ ;  
 $h(t) = 0.321e^{-0.05t} \cos(0.312t + 90^\circ)$ ;  
 $u_{\text{ВІХ}}(t) = E_m h(t)1(t) - E_m h(t - \tau_{\text{імп}}) \cdot 1(t - \tau_{\text{імп}})$  В.

**Задача 5.11.** У колах (рис. 5.20) знайти та побудувати: імпульсну, перехідну характеристики та напругу на виході  $u_{\text{ВІХ}}(t)$ . Вхідна напруга  $u_{\text{ВІХ}}(t) = 6e^{-2t}$  В,  $t \geq 0$ . Параметри кола: а)  $\tau = 0.5$  мкс; б)  $\tau = 0.2$  мкс.

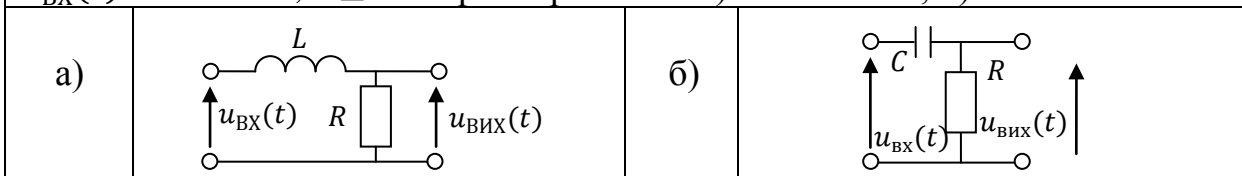
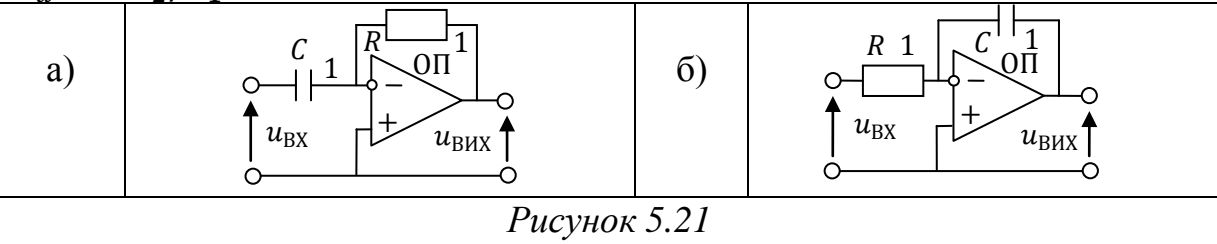


Рисунок 5.20

Відповідь: а)  $g(t) = 2e^{-2t}$ ,  $h(t) = 1 - e^{-2t}$ ,  $u_{\text{ВІХ}}(t) = 12te^{-2t}$  В;  
 б)  $g(t) = \delta(t) - 5e^{-5t}$ ,  $h(t) = e^{-5t}$ ,  $u_{\text{ВІХ}}(t) = 10e^{-5t} - 4e^{-2t}$  В.

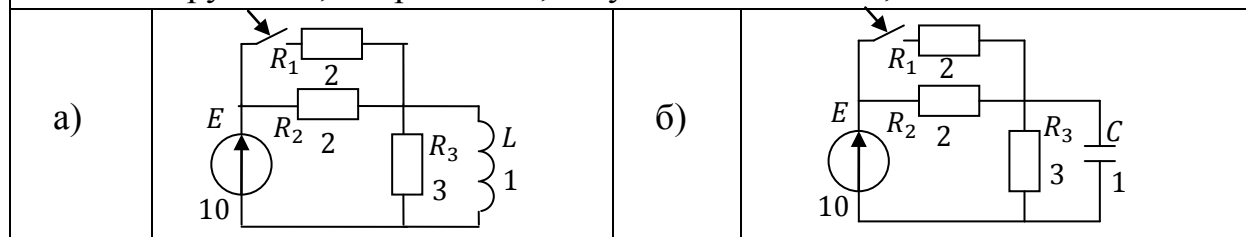
**Задача 5.12.** У колі (рис. 5.21) знайти та побудувати  $u_{\text{вих}}(t)$ . Вхідна напруга  $u_{\text{ВХ.1}}(t) = 1 - e^{-t}$ ,  $u_{\text{ВХ.2}}(t) = 4te^{-2t}$  В ( $t \geq 0$ ). Числові значення елементів:  $R = 1$  кОм,  $C = 1$  нФ. Коефіцієнт передачі за напругою  $K_u = -Z_2/Z_1$ .



Відповідь: а)  $u_{\text{ВИХ.1}}(t) = -e^{-t}$  В,  $u_{\text{ВИХ.2}}(t) = 8te^{-2t} - 4e^{-2t}$  В;  
 б)  $u_{\text{ВИХ.1}}(t) = 1 - e^{-t} - t$  В,  $u_{\text{ВИХ.2}}(t) = -1 + 2te^{-2t} + 1e^{-2t}$  В.

### 5.2.3 Перехідні процеси

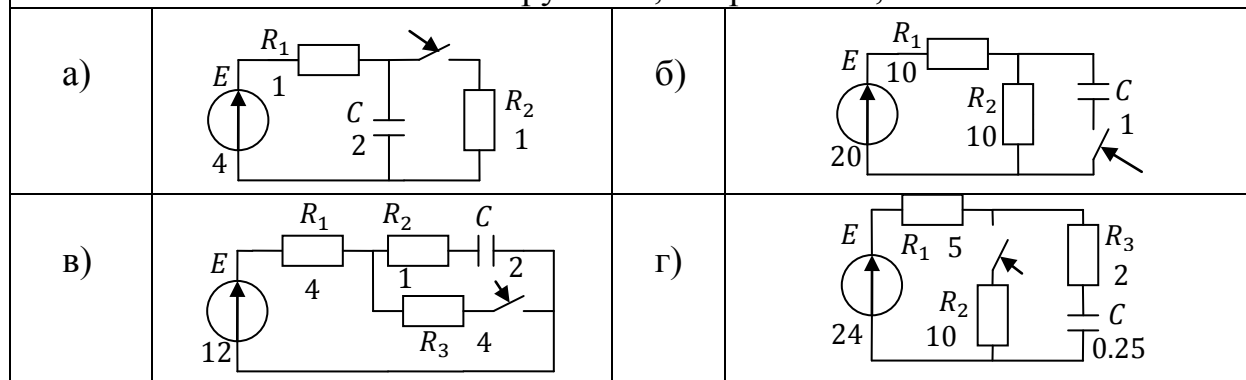
**Задача 5.13.** У колах (рис. 5.22) операторним методом знайти напругу та струм на реактивності до та після комутації. Побудувати їх графіки. На схемі: напруга – В, опори – кОм, індуктивності – мГн, ємності – нФ.



*Рисунок 5.22*

Відповідь: а)  $i_L(t) = \begin{cases} 10 - 5e^{-\frac{3}{4}t}, & t \geq 0; \\ 5, & t < 0. \end{cases}$   $U_L(t) = \begin{cases} \frac{15}{4} \cdot e^{-\frac{3}{4}t}, & t \geq 0; \\ 5, & t < 0. \end{cases}$   
 б)  $u_C(t) = \begin{cases} 7.5 - 1.5e^{-\frac{4}{3}t}, & t \geq 0; \\ 6, & t < 0; \end{cases}$   $i_C(t) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-\frac{4}{3}t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

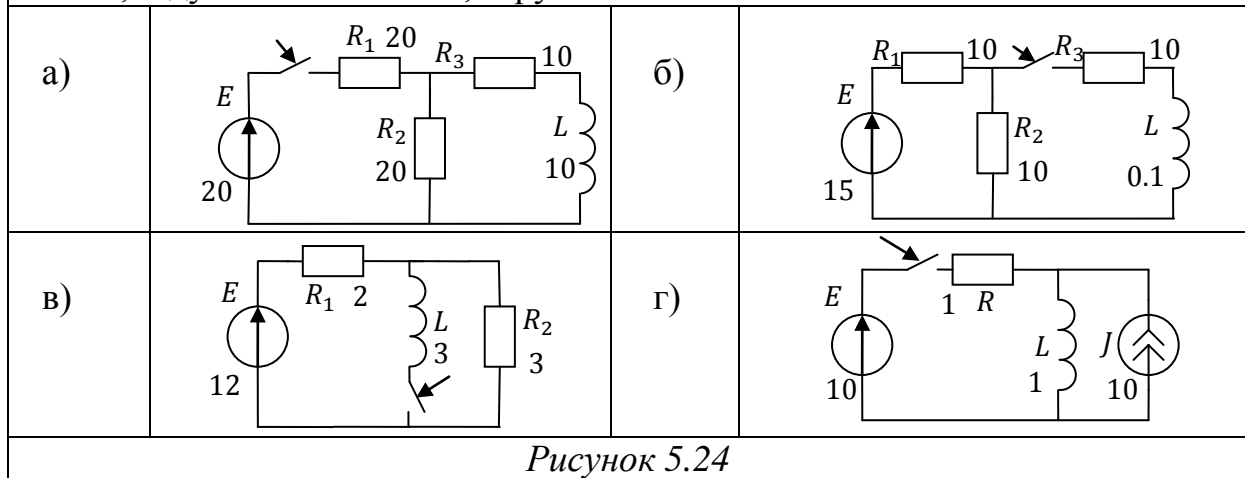
**Задача 5.14.** У колах (рис. 5.23) розрахувати операторним методом напругу та струм на ємності до та після комутації. Побудувати їх графіки. Числові значення на схемі: напруга – В, опори – кОм, ємності – нФ.



*Рисунок 5.23*

Відповідь: а)  $u_C(t) = \begin{cases} 2 + 2e^{-t}, & t \geq 0; \\ 4, & t < 0; \end{cases}$  В;  $i_C(t) = \begin{cases} -4e^{-t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0; \end{cases}$  мА.  
 б)  $i_C(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 2e^{-0.2t}, & t \geq 0. \end{cases}$  А;  $u_C(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 10 - 10e^{-0.2t}, & t \geq 0. \end{cases}$  В.  
 в)  $i_C(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -2e^{-t/6}, & t \geq 0; \end{cases}$  мА;  $u_C(t) = \begin{cases} 12, & t < 0; \\ 6 + 6e^{-t/6}, & t \geq 0; \end{cases}$  В.  
 г)  $i_C(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -1.5e^{-0.75t}, & t \geq 0. \end{cases}$  мА;  $u_C(t) = \begin{cases} 24, & t < 0; \\ 16 + 8e^{-0.75t}, & t \geq 0. \end{cases}$  В.

**Задача 5.15.** У колах (рис. 5.24) розрахувати операторним методом напругу та струм на індуктивності до та після комутації. Побудувати їх графіки. Числові значення елементів наведені на схемі: напруга – В, опори – кОм, індуктивності – мГн, струм – мА.



Відповідь: а)  $i_L(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 0.5 - 0.5e^{-2t}, & t \geq 0; \end{cases}$  мА;  $u_L(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 10e^{-2t}, & t \geq 0; \end{cases}$  В.  
 б)  $i_L(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 0.5 - 0.5e^{-150t}, & t \geq 0; \end{cases}$  мА;  $u_L(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 7.5e^{-150t}, & t \geq 0; \end{cases}$  В.  
 в)  $i_L(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 6 - 6e^{-0.4t}, & t \geq 0; \end{cases}$  мА;  $u_L(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 7.2e^{-0.4t}, & t \geq 0; \end{cases}$  В;  
 г)  $u_L(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 10e^{-t}, & t \geq 0; \end{cases}$  В;  $i_L(t) = \begin{cases} 10, & t < 0; \\ 20 - 10e^{-t}, & t \geq 0; \end{cases}$  А.

**Задача 5.16.** У колі (рис. 5.25) до та після комутації одержати вирази напруги та струму на ємності, побудувати їх графіки. Числові значення елементів кола такі: опори в кОм, ємності в нФ, струм в мА.

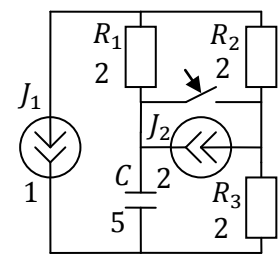
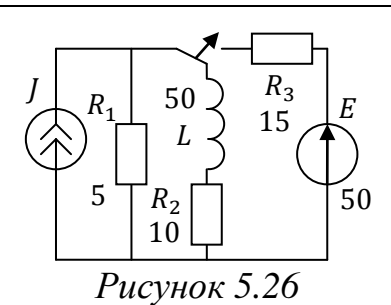


Рисунок 5.25

Відповідь:  $u_C(t) = \begin{cases} -2 + 6e^{-0.1t}, & t \geq 0, \\ 4, & t < 0, \end{cases}$  В;  $i_C(t) = \begin{cases} -3e^{-0.1t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$  мА.

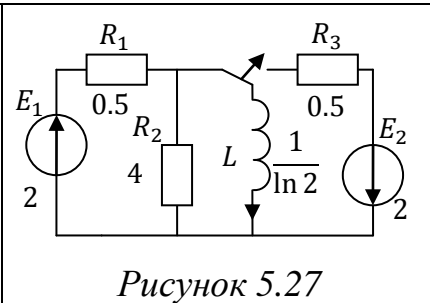
## 5.2.4. Олімпіадні задачі

**Задача 5.17\*\***. У колі (рис. 5.26) визначити яке буде значення джерела, щоб у колі після перемикання ключа за час 1.6 мс струм в індуктивності встановився 1.4 мА. Ключ перемикається миттєво. Опори в кОм, індуктивності в мГн, напруги в В, струми в мА.



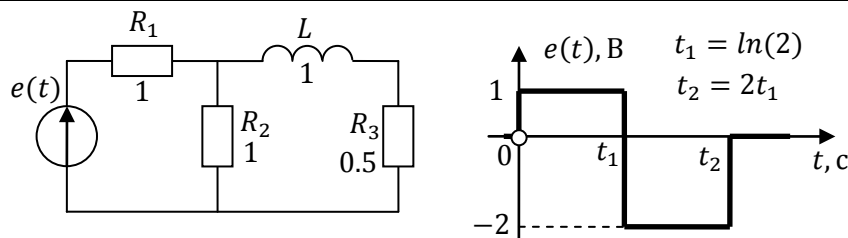
Відповідь:  $J = 2$  мА.

**Задача 5.18\*\*\***. У колі (рис. 5.27) визначити скільки енергії отримає джерело  $E_2$  під час перехідного процесу. Ключ перемикається миттєво. Опори в кОм, індуктивності в мГн, напруги в В.



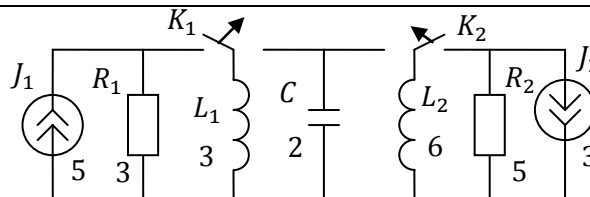
Відповідь:  $W_{E2} = -7$  мДж.

**Задача 5.19\*\*\***. У колі (рис. 5.28) знайти момент часу  $t_x > 0$ , в який струм через індуктивність дорівнює нулю, якщо у початковий момент часу  $t = 0$  струм через індуктивність не тече. Знайти значення потужності джерела  $P_E$  у момент часу  $t_x$ . Всі опори в Ом, індуктивності в Гн, напруга в В, час в с.



Відповідь:  $t_x = 0.9$  с;  $P_E = 2$  Вт.

**Задача 5.20\*\*\***. У колі (рис. 5.29) визначити максимальне значення напруги на ємності  $U_{C.max}$  під час перехідного процесу, якщо у момент перемикання ключів ємність не мала заряду. Ключі  $K_1, K_2$  одночасно та миттєво перемикаються. Всі опори в кОм, ємності в нФ, індуктивності в мГн, напруга в В, струми в мА.



Відповідь:  $U_{C.max} = 2$  В.

**Задача 5.21\***. У колі (рис. 5.30) операторним методом визначити яка напруга  $U_{ab}$  встановиться після завершення перехідного процесу. Числові значення елементів наведені на схемі: напруга – В, струми – мА, опори – кОм, ємності – нФ.

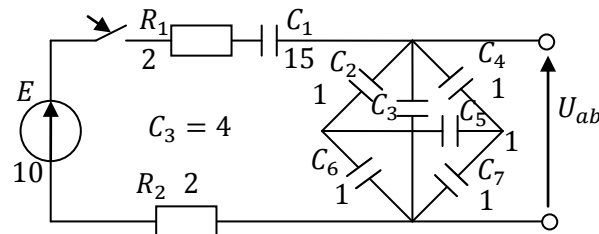


Рисунок 5.30

Відповідь:  $U_{ab} = 7.5$  В.

**Задача 5.22\*\*\***. У колі (рис. 5.31) знайти операторним методом  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  у момент замикання ключа. Ключ замикається при нульових початкових умовах (ємності не містять заряду у момент комутації). Числові значення елементів кола: струм – мА, опори – кОм, ємності – нФ.

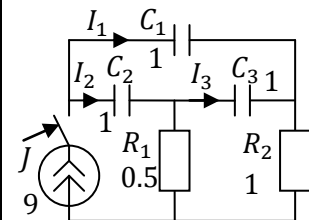


Рисунок 5.31

Відповідь:  $I_1 = 4$  мА,  $I_2 = 5$  мА,  $I_3 = 1$  мА.

**Задача 5.23\*\*\***. У колах (рис. 5.32 а) операторним методом знайти струми  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  та напруги на ємностях (рис. 5.32 б), що установаються після завершення перехідного процесу. Числові значення елементів наведені на схемі. Ключ замикається при нульових початкових умовах. На схемах: індуктивності в мГн, ємності в нФ, опори в кОм, напруги в В, струми в мА.

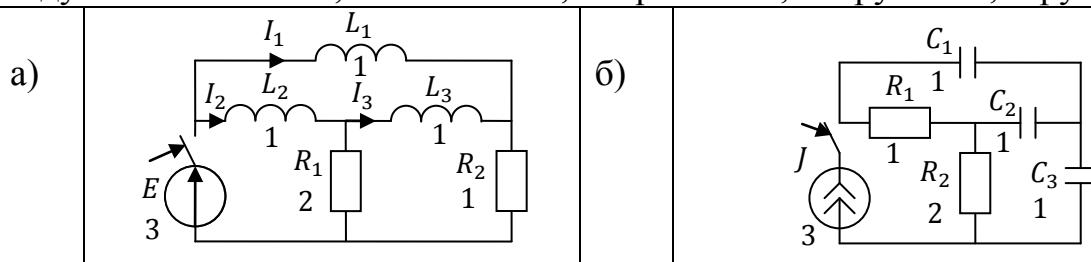


Рисунок 5.32

Відповідь: а)  $I_1 = 2$  мА,  $I_2 = 2.5$  мА,  $I_3 = 0.5$  мА;

б)  $U_1 = 4$  В,  $U_2 = 1$  В,  $U_3 = 5$  В.

**Задача 5.24\*\***. У колі (рис. 5.33) комутація відбувається в момент часу  $t = 0$ . Знайти струм, що протікає у опорі  $R_2$  при  $t \geq 0$ .

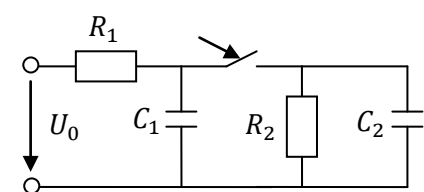


Рисунок 5.33

Відповідь:  $i_{R2}(t) = \frac{U_0}{R_1 + R_2} + \left( \frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \cdot \frac{U_0}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_e}}$ ,  $\tau_e = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot (C_1 + C_2)}$ .

## 6. ДОВГІ ЛІНІЇ

### 6.1. Короткі теоретичні відомості

Кола із розподіленими параметрами на відміну від кіл із зосередженими параметрами, характеризуються хвильовими процесами, при цьому величини, що їх описують у загальному випадку є функціями часу та просторових координат. Одним із прикладів кіл із розподіленими параметрами є довгі лінії.

**Довгими лініями** називають такі лінії, геометричні розміри яких більше робочої довжини хвилі електромагнітних коливань або співвимірні з нею.

Довжина хвилі (length of wave) визначається

$$\lambda = \frac{c}{f},$$

$c = 3 \cdot 10^8$  м/с – швидкість світла.

У довгих лініях необхідно враховувати електричні процеси за допомогою яких електрична енергія чи сигнали передаються на відстань, оскільки електричні та магнітні поля розподілені вздовж всієї довжини лінії та перетворення електромагнітної енергії у тепло також відбувається по всій довжині лінії.

**Первинні параметри довгої лінії** (їх ще називають погонними параметрами) будемо розуміти опір  $R_0$ , індуктивність  $L_0$ , провідність  $G_0$  та ємність  $C_0$ , віднесені до одиниці її довжини.

Опір  $R_0$ , зумовлений втратами вздовж лінії, провідність  $G_0$  зумовлена провідністю витoku між проводами, ємність  $C_0$  зумовлена ємністю між проводами, індуктивність  $L_0$  зумовлена магнітним потоком, що зчіплюється з контуром струму. Для одержання рівнянь однорідної лінії розіб'ємо її на окремі ділянки нескінченно малої довжини  $dx$  зі структурою, що вказана на рис. 6.1.

Погонні параметри  $L_0$ ,  $G_0$  та  $C_0$  також є частотно залежними, оскільки від частоти у загальному випадку залежать діелектрична та магнітна проникність середовища. Погонний параметр  $R_0$ , залежить від частоти через поверхневий ефект.

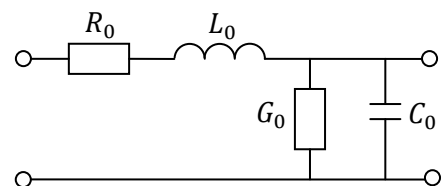


Рисунок 6.1

Таку ділянку лінії описують телеграфними рівняннями (the telegraph equation)

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases}$$

Введемо такі позначення

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0, \quad Y_0 = G_0 + j\omega C_0,$$

де  $Z_0$  та  $Y_0$  - відповідно комплексні опори та провідності на одиницю довжини лінії.



## Вторинні параметри

Корені рівняння визначаються виразом

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \alpha + j\beta,$$

який називають сталою поширення, де  $\alpha$  – це коефіцієнт загасання,  $\beta$  – це коефіцієнт фази.

Коефіцієнт загасання  $\alpha$  визначає зменшення амплітуди хвилі струму або напруги при проходженні одиниці довжини. Коефіцієнт фази або хвильове число  $\beta$  показує зміну фази при проходженні одиниці шляху.

Коефіцієнт загасання визначається виразом

$$\alpha = \ln \left( \frac{u_{\text{ПАД}}(x)}{u_{\text{ПАД}}(x+1)} \right) = \ln \left( \frac{e^{-\alpha x}}{e^{-\alpha(x+1)}} \right) = \ln(e^{\alpha}) = \alpha.$$

Розмірність  $\alpha$  має Неп/м.

Величину

$$Z_{XB} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

називають хвильовим опором.

Розв'язок системи телеграфних рівнянь є рівняння передачі

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_{XB})e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_{XB})e^{\gamma x}; \\ \dot{I}(x) = \frac{1}{2}\left(\dot{I}_1 + \frac{\dot{U}_1}{Z_{XB}}\right)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}\left(\dot{I}_1 - \frac{\dot{U}_1}{Z_{XB}}\right)e^{\gamma x}. \end{cases}$$

Складові у правій частині одержаних рівнянь для струму та напруги у лінії можна трактувати як суму падаючої (the incident wave) та відбитої хвиль (the reflected wave): перша рухається та загасає у напрямку збільшення координати  $x$ , друга – зменшення.

Хвилю, що рухається від початку лінії у бік збільшення  $x$  (рис. 6.2 а), називають **прямою**, а хвилю, що рухається від кінця лінії у напрямку зменшення  $x$  (рис. 6.2 б) – **зворотною**.

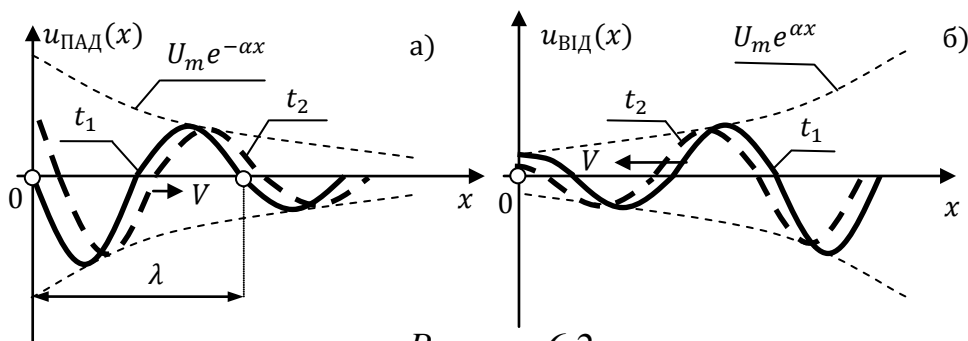


Рисунок 6.2

Вираз для миттєвих значень напруги

$$u_{\text{ПАД}}(x, t) = U_m e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \theta - \beta x) = U_{\text{ПР}},$$

$$u_{\text{ВІД}}(x, t) = U_m e^{\alpha x} \cos(\omega t + \theta + \beta x) = U_{\text{ЗВ}},$$

де  $U_m$  – амплітуда напруги на початку лінії, де її початкова фаза прийнята рівною нулю.

Отже, розподіл напруги вздовж лінії у будь-який момент часу

$$\dot{U} = \dot{U}_{\text{ПАД}} + \dot{U}_{\text{ВІД}}; \quad \dot{I} = \dot{I}_{\text{ПАД}} + \dot{I}_{\text{ВІД}}.$$

Для прямих та зворотних хвиль напруги та струму виконується закон Ома

$$\dot{I}_{\text{ПАД}} = \frac{\dot{U}_{\text{ПАД}}}{Z_{\text{ХВ}}}; \quad \dot{I}_{\text{ВІД}} = \frac{\dot{U}_{\text{ВІД}}}{Z_{\text{ХВ}}}.$$

Для нескінченно довгої лінії у будь-якій її точці, у тому числі і на вході, відношення комплексів напруги та струму є постійною величиною, що дорівнює хвильовому опору

$$Z_{\text{ХВ}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_{\text{ВХ}}.$$

Для нескінченно довгої лінії у будь-якій її точці **хвильовий опір** є відношення комплексів напруги до струму

$$Z_{\text{ХВ}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}.$$

Відстань між двома точками хвилі, фази яких різняться на  $2\pi$ , називається довжиною хвилі. Довжина хвилі в лінії  $\lambda$  визначається значенням коефіцієнту фази

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

**Фазова швидкість** – це швидкість переміщення вздовж лінії незмінного фазового стану, тобто швидкість, з якою необхідно переміщуватись вздовж лінії, щоб спостерігати одну й ту же фазу хвилі

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{\beta}.$$

**Коефіцієнт відбиття** у загальному випадку є відношення амплітуди струмів або напруг зворотної та прямої хвиль в будь-якій точці лінії.

Найчастіше коефіцієнт відбиття визначається у точках, де є яка-небудь неоднорідність (кінець або початок лінії).

Коефіцієнт відбиття за напругою

$$\dot{n}_u = \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_{\text{ХВ}}}{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_{\text{ХВ}}} = \frac{\dot{I}_2 Z_{\text{Н}} - \dot{I}_2 Z_{\text{ХВ}}}{\dot{I}_2 Z_{\text{Н}} + \dot{I}_2 Z_{\text{ХВ}}} = \frac{Z_{\text{Н}} - Z_{\text{ХВ}}}{Z_{\text{Н}} + Z_{\text{ХВ}}}.$$

Коефіцієнт відбиття за струмом

$$\dot{n}_i = \frac{Z_{\text{ХВ}} - Z_{\text{Н}}}{Z_{\text{ХВ}} + Z_{\text{Н}}} = -\frac{Z_{\text{Н}} - Z_{\text{ХВ}}}{Z_{\text{Н}} + Z_{\text{ХВ}}} = -\dot{n}_u.$$

Оскільки  $\dot{n}_i = -\dot{n}_u$ , то можна зробити висновок, що у там, де у розподілі є максимум напруги, там буде мінімум струму.

Відсутність зворотної хвилі має ту перевагу, що вся потужність, що переноситься прямою хвилею до кінця лінії, поглинається опором навантаження. При присутності зворотної хвилі частина потужності прямої хвилі повертається у джерело.

Коефіцієнт біжної хвилі

$$KBX = \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{|U_{ПАД}| - |U_{ВІД}|}{|U_{ПАД}| + |U_{ВІД}|} = \frac{1 - |n|}{1 + |n|}.$$

Коефіцієнт стійної хвилі

$$КСХ = \frac{1}{KBX}$$

Процес знаходження у кожній точці струму та напруги буде зводитися до знаходження суми двох векторів – падаючої та відбитої хвиль. Цей процес зручно зображувати у вигляді розподілу амплітуд струмів або напруг вздовж всієї довжини лінії.

Коефіцієнт відбиття за напругою

$$\dot{n}_u = \frac{\dot{U}_{ВІД}}{\dot{U}_{ПАД}} = ne^{j\varphi_n}$$

Розподіл амплітуд напруги або струму уздовж лінії зручніше будувати від кінця лінії, припустивши, що відомо падаючу хвилю наприкінці лінії

$$\dot{U}_{ВІД} = \dot{n}\dot{U}_{ПАД} = nU_{ПАД}e^{j(\varphi_{ПАД} + \varphi_n)}.$$

Залежно від знака аргументу  $\varphi_n$  коефіцієнта відбиття вектор відбитої хвилі наприкінці лінії може бути спрямований або убік випередження вектора падаючої хвилі при  $\varphi_n > 0$  (рис. 4.3), або убік відставання при  $\varphi_n < 0$  (рис. 6.4).

Для випадку  $\varphi_n > 0$  першим буде максимум – вектори падаючих і відбитої хвиль рухаються на зустріч один одному і додаються у фазі (рис. 6.3).

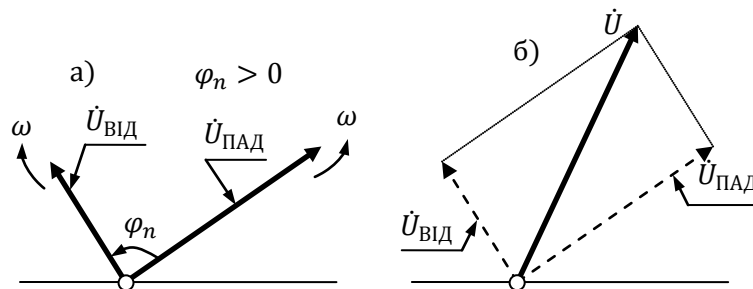


Рисунок 6.3

Відстань до нього можна визначити у такий спосіб: два вектори додаються у фазі, пройшовши кутову відстань рівну  $\varphi_n/2$  (навпіл, тому що рухаються на зустріч один одному)

$$\frac{\varphi_n}{2} = \beta \cdot x_{max}.$$

Звідси відстань до першого по порядку максимуму

$$x_{max} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\varphi_n}{2} = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{\varphi_n}{2}.$$

При цьому перший мінімум напруги буде на відстані від першого максимуму у чверть довжини хвилі

$$x_{min} = x_{max} + \frac{\lambda}{4}.$$

Для випадку  $\varphi_n < 0$  (рис. 6.4) першим буде мінімум, тому що вектори спочатку починають розходитися.

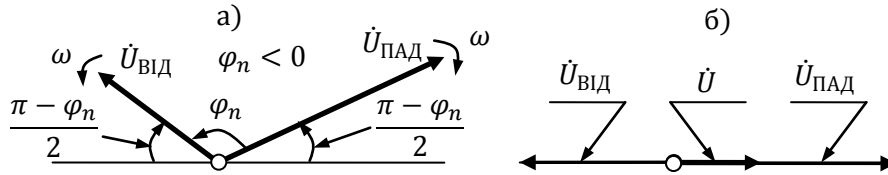


Рисунок 6.4

При цьому кожний із них до точки першого мінімуму від кінця лінії пройде кутову відстань

$$\frac{\pi - |\varphi_n|}{2} = \beta \cdot x_{\max}.$$

Звідси відстань до першого по порядку мінімуму

$$x_{\min} = \frac{1}{\beta} \cdot \left[ \pi - \frac{|\varphi_n|}{2} \right] = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \left[ \pi - \frac{|\varphi_n|}{2} \right].$$

При цьому перший максимум напруги буде на відстані

$$x_{\max} = x_{\min} + \frac{\lambda}{4}.$$

Активна потужність вздовж лінії

$$P_{\text{АКТ}} = UI \cos \varphi.$$

Зсув фази між струмом та напругою в будь-якій точці лінії складає  $\pi/2$ , тому активна потужність в будь-якій точці лінії буде 0.

Режим роботи довгої лінії, що навантажена на опір, рівний хвильовому, називається **узгодженим**, а сама лінія називається лінією з **узгодженим навантаженням**.

**Режим біжних хвиль** характеризується наявністю тільки падаючої (прямої) хвилі, що поширюється від генератору до навантаження.

Відбита хвиля відсутня. Потужність, що переноситься падаючою хвилею, повністю виділяється у навантаженні.

**Режим стійних хвиль** встановлюється за умови рівності амплітуд падаючої та відбитої хвиль. Виконання цієї умови можливе для лінії без втрат. Режим стійних хвиль має місце в лінії, що навантажена на опір, в якому немає втрат енергії падаючої хвилі. При цьому падаюча хвиля повністю перетворюється на відбиту хвилю.

У випадку лінії без втрат ( $\alpha = 0$ ) вигляд рівнянь передачі

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos(\beta x) + j \dot{I}_2 Z_{XB} \sin(\beta x); \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos(\beta x) + j \frac{\dot{U}_2}{Z_{XB}} \sin(\beta x). \end{cases}$$

Рівняння передачі у режимі холостого ходу ( $\dot{I}_2 = 0$ )

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos(\beta x); \\ \dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{Z_{XB}} \sin(\beta x). \end{cases}$$

Рівняння передачі у режимі короткого замикання ( $\dot{U}_2 = 0$ )

$$\begin{cases} \dot{U} = jI_2 Z_{XB} \sin(\beta x); \\ I = I_2 \cos(\beta x). \end{cases}$$

Вхідний опір такої лінії, взявши  $\dot{U}_2 = I_2 Z_H$

$$Z_{BX} = Z_{XB} \frac{Z_H \cos(\beta x) + jZ_{XB} \sin(\beta x)}{Z_{XB} \cos(\beta x) + jZ_H \sin(\beta x)}.$$

Вхідний опір та провідність кола у режимі холостого ходу та короткого замикання

$Z_{BX,XX} = -jZ_{XB} \operatorname{ctg}(\beta x);$	$Y_{BX,XX} = jY_{XB} \operatorname{tg}(\beta x);$
$Z_{BX,KЗ} = jZ_{XB} \operatorname{tg}(\beta x);$	$Y_{BX,KЗ} = -jY_{XB} \operatorname{ctg}(\beta x).$

Для максимальної передачі потужності необхідно, щоб довга лінія була узгоджена, тобто щоб не було відбитої хвилі.

Для **узгодженого режиму** необхідно, щоб опір навантаження дорівнював хвильовому опору.

Якщо лінія не узгоджена, то необхідно штучним шляхом досягти рівностей опора навантаження та хвильового опору лінії.

Короткозамкнені відрізки лінії широко використовуються у якості реактивних шлейфів.

**Реактивні шлейфи** – це пристрої, що вмикаються паралельно до будь-якої ділянки кола для компенсації уявної складової його вхідної провідності.

Вхідний опір лінії без втрат

$$Z_{BX} = R_{XB} \frac{Z_H \cos\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) + jR_{XB} \sin\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)}{R_{XB} \cos\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) + jZ_H \sin\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)}.$$

Вхідний опір для ліній різної довжини

$$\begin{aligned} Z_{BX}(l = \lambda/2) &= Z_H; \\ Z_{BX}\left(l = \frac{\lambda}{4}\right) &= \frac{R_{XB}^2}{Z_H}; \\ Z_{BX}(\lambda/8) &= R_{XB} \frac{Z_H + jR_{XB}}{R_{XB} + jZ_H}. \end{aligned}$$

Вхідні опори чвертьхвильових відрізків:

$$\begin{aligned} R_{BX.1} &= \frac{R_{XB.2}^2}{R_1}; \\ R_{BX.2} &= \frac{R_{XB.3}^2}{R_2}. \end{aligned}$$

Загальний еквівалентний опір навантаження лінії (рис. 6.5)

$$R_H = \frac{R_{BX.1} \cdot R_{BX.2}}{R_{BX.1} + R_{BX.2}}.$$

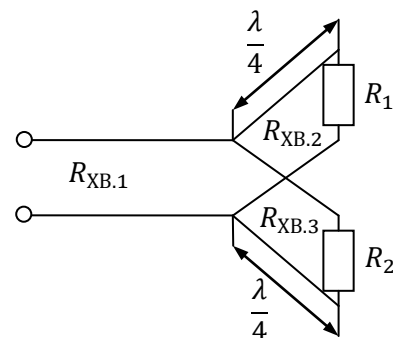


Рисунок 6.5

**Трансформуючі лінії** – це відрізки довгої лінії з властивостями, що призначені для узгодження опорів лінії (рис. 6.6).

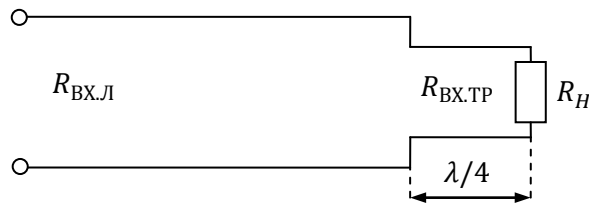


Рисунок 6.6

Параметри відрізка лінії, що використовується у якості чверть хвильового трансформатора, вибирають таким чином, щоб хвильовий опір трансформатора визначався  $R_{BX.L} = R_{BX.TP}$ .

Тоді маємо

$$R_{BX.TP} = \frac{R_{XB.TP}^2}{R_H}, \quad R_{BX.L} = \frac{R_{XB.TP}^2}{R_H}, \quad R_{XB.TP} = \sqrt{R_{BX.L} \cdot R_H}.$$

**Реактивні шлейфи** – це пристрої, що вмикаються паралельно до будь-якої ділянки кола для компенсації уявної складової його вхідної провідності.

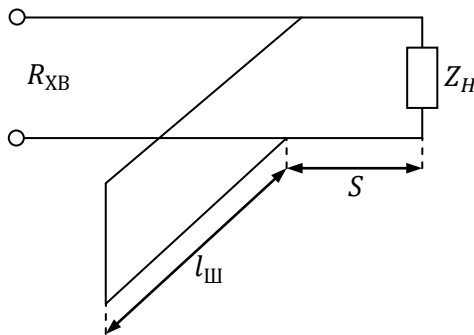


Рисунок 6.7

Відстань від місця ввімкнення шлейфу до точки ввімкнення навантаження  $S$  (рис. 6.7) вибирають таким чином, щоб  $Re[Y_{BX}] = Y_{XB} = 1/R_{XB}$

$$Y_{11} = 1/R_{XB} + jb.$$

А довжину шлейфа  $l_{ш}$  вибрати таким чином, щоб вхідна провідність шлейфу дорівнювала  $-jb$ .

Вхідна провідність лінії без втрат

$$\begin{aligned} Y_{BX} &= Y_{XB} \frac{\cos(\beta x) + jm_1 \sin(\beta x)}{m_1 \cos(\beta x) + j \sin(\beta x)} = \\ &= Y_{XB} \frac{m_1}{m_1^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)} + jY_{XB} \frac{0.5(m_1^2 - 1) \sin(2\beta x)}{m_1^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)}. \end{aligned}$$

Місце ввімкнення шлейфу знаходиться із умови

$$Re[Y_{BX}] = Y_{XB} \frac{m_1}{m_1^2 \cos^2(\beta l_0) + \sin^2(\beta l_0)} = Y_{XB}, \quad m_1 = \frac{R_H}{Z_{XB}}.$$

Звідси визначаємо

$$S = x = \frac{\arccos(k)}{\beta}, \quad k = \cos(\beta x) = \sqrt{\frac{1}{m_1 + 1}}.$$

Величина реактивності, яку необхідно компенсувати

$$Im[Y_{BX}] = b_{BX}(S).$$

Довжину шлейфу визначають

$$b_{BX}(S) = Y_{BX.K3} = Y_{XB} \operatorname{ctg}(\beta l_{ш}).$$

### Перехідні процеси у довгих лініях

У довгих лініях можуть виникати перехідні процеси. Перехідні процеси в лініях виникають при передачі телеграфних та телефонних сигналів, імпульсів телемеханіки та спеціальних імпульсів телеконтроля для перевірки ліній та виявлення місця їх пошкодження.

При розрахунку перехідних процесів у лініях спочатку розраховують коефіцієнти відбиття від навантаження та від генератора. А далі будують розподіл падаючої хвилі та відбитої від довжини лінії із урахуванням коефіцієнту відбиття. Після чого будуть розподіл амплітуди струму або напруги хвилі у часі.

Також при розрахунку перехідних процесів у лініях використовують правило подвоєння хвиль.

#### Правило подвоєння хвиль:

При падінні на вузол хвилі із напругою  $u_{\text{ПАД}}$ , що рухається по лінії із хвильовим опором  $Z_{\text{ХВ}}$ , напруга та струм в цьому вузлі будуть такими ж, як і при підключенні джерела з ЕРС, що дорівнює напрузі  $2u_{\text{ПАД}}$  та внутрішнім опором  $Z_{\text{ХВ}}$ , безпосередньо до розглянутого вузла.

Оскільки  $U_{\text{ВІД}} = nU_{\text{ПАД}}$  має місце для операторних величин, то для знаходження відбитої хвилі у часовій області доведеться виконати обернене перетворення Лапласа

Напруга в кінці лінії (рис. 6.8)

$$U_2(p) = U_{\text{ПАД}} + U_{\text{ВІД}} = U_{\text{ПАД}} + nU_{\text{ПАД}} = U_{\text{ПАД}} + \frac{Z_{\text{Н}} - Z_{\text{ХВ}}}{Z_{\text{Н}} + Z_{\text{ХВ}}} U_{\text{ПАД}} = \frac{2U_{\text{ПАД}}Z_{\text{Н}}}{Z_{\text{Н}} + Z_{\text{ХВ}}}.$$

Такий вираз буде еквівалентний схемі (рис. 6.8 б).

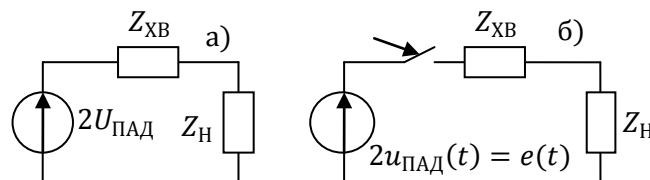


Рисунок 6.8

Таким чином, якщо відома падаюча хвиля  $u_{\text{ПАД}}(t)$  в кінці лінії, то можемо розрахувати напругу  $u_2(t)$  за наведеною схемою будь-яким способом (не обов'язково операторним) та знайти відбиту хвилю

$$u_{\text{ВІД}}(t) = u_2(t) - u_{\text{ПАД}}(t).$$

Такий спосіб є зручним для знаходження відбитої хвилі без використання перетворень Лапласа.

## 6.2. Задачі для самостійного розв'язання

### 6.2.1. Лінії із втратами

**Задача 6.1.** У лінії із втратами, що працює в узгодженому гармонічному режимі на частоті 15 МГц, на відстані 50 м від генератора напруга змінюється за законом  $u(t, 50) = 100 \cos(\omega t - 10^\circ)$  В. Записати вираз напруги на відстані 155 м від генератора  $u(t, 155)$ . Коефіцієнт загасання  $\alpha = 0.00692$  Неп/м. Швидкість поширення хвилі дорівнює швидкості світла

Відповідь:  $u(t, 155) = 48.3 \cos(\omega t - 100^\circ)$  В.

**Задача 6.2.** У лінії із втратами, що працює в узгодженому гармонічному режимі на частоті 30 МГц, на відстані 80 метрів від генератора напруга змінюється за законом  $u(t, 80) = 120 \sin(\omega t - 25^\circ)$  В. Записати вирази напруги на відстані 70, 135 метрів від генератора відповідно  $u(t, 70)$  та  $u(t, 135)$ . Коефіцієнт загасання становить  $\alpha = 0.00758$  Неп/м. Швидкість поширення хвилі дорівнює швидкості світла.

Відповідь:  $u(t, 70) = 129.45 \cos(\omega t - 25^\circ)$  В;  
 $u(t, 135) = 79.1 \cos(\omega t - 205^\circ)$  В.

**Задача 6.3** У лінії із втратами, що працює в узгодженому гармонічному режимі на частоті 60 МГц, на відстані 260 метрів від генератора струм змінюється за законом  $i(t, 260) = 80 \sin(\omega t - 20^\circ)$  А. Написати вирази струму на відстані 155 метрів від генератора  $i(t, 155)$ . Коефіцієнт загасання становить  $\alpha = 0.00854$  Неп/м. Швидкість поширення хвилі дорівнює швидкості світла.

Відповідь:  $i(t, 155) = 196.12 \cos(\omega t - 20^\circ)$  А.

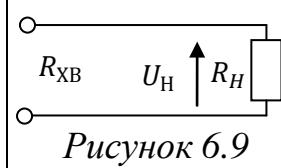
**Задача 6.4.** У однорідній лінії, що працює у гармонічному режимі та навантажена на хвильовий опір, знайти активну потужність, що відається генератором та потужність, що споживається у навантаженні, якщо навантаження ввімкнене на відстані 50 м від генератора. Стала поширення  $\gamma = 0.008 + j0.0045$  1/м. Напруга та струм на вході лінії становлять  $u(t) = 500 \sin(\omega t)$  В,  $i(t) = 10 \sin(\omega t)$  А.

Відповідь:  $P_{\Gamma} = 2.5$  кВт,  $P_{\text{Н}} = 1.122$  кВт.



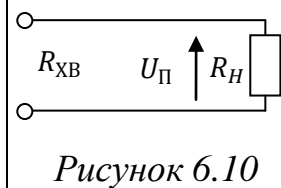
### 6.2.2. Прості розподіли у довгій лінії без втрат

**Задача 6.5.** У лінії без втрат (рис. 6.9) визначити: коефіцієнти відбиття за напругою та струмом, КБХ, КСХ. Побудувати розподіл  $u(x)$  та  $i(x)$ . Лінія має опори:  $R_{XB} = 50$  Ом,  $R_H = 100$  Ом та працює в усталеному гармонічному режимі. Амплітуда напруги у навантаженні  $U_H = 200$  В.



Відповідь:  $n_u = 1/3$ ;  $n_i = -1/3$ ; КБХ = 0.5, КСХ = 2.

**Задача 6.6.** У лінії без втрат (рис. 6.10) визначити: коефіцієнти відбиття за напругою та струмом, КБХ, КСХ. Побудувати розподіл  $u(x)$  та  $i(x)$ . Лінія має опори:  $R_{XB} = 50$  Ом,  $R_H = 100$  Ом та працює в усталеному гармонічному режимі. Амплітуда падаючої напруги у навантаженні  $U_{ПД} = 300$  В.



Відповідь:  $n_u = 1/3$ ,  $n_i = -1/3$ , КБХ = 0.5, КСХ = 2.

**Задача 6.7.** У лінії без втрат визначити: коефіцієнти відбиття за напругою та струмом, КБХ, КСХ. Побудувати розподіл  $u(x)$  та  $i(x)$ . Лінія працює в усталеному гармонічному режимі із хвильовим опором  $R_{XB} = 300$  Ом та опором навантаження  $R_H = 100$  Ом. Амплітуда відбитої напруги у навантаженні  $U_{ВІД} = 100$  В.

Відповідь:  $n_u = -0.5$ ,  $n_i = 0.5$ , КБХ =  $1/3$ , КСХ = 3.

**Задача 6.8.** У лінії без втрат визначити: коефіцієнти відбиття за напругою та струмом, КБХ, КСХ. Побудувати розподіл  $u(x)$  та  $i(x)$ . Лінія працює в усталеному гармонічному режимі із хвильовим опором  $R_{XB} = 400$  Ом та опором навантаження  $R_H = 100$  Ом. Амплітуда струму у навантаженні становить  $I_2 = 10$  А.

Відповідь:  $n_i = 3/5$ ,  $n_u = -3/5$ , КБХ =  $1/4$ , КСХ = 4.

**Задача 6.9.** Лінія без втрат навантажена на: а) активно-ємнісне навантаження (рис. 6.11 а); б) активно-індуктивне навантаження (рис. 6.11 б). Показати, що при відліку координати «х» від кінця лінії першим по порядку буде мінімум чи максимум амплітуди напруги.

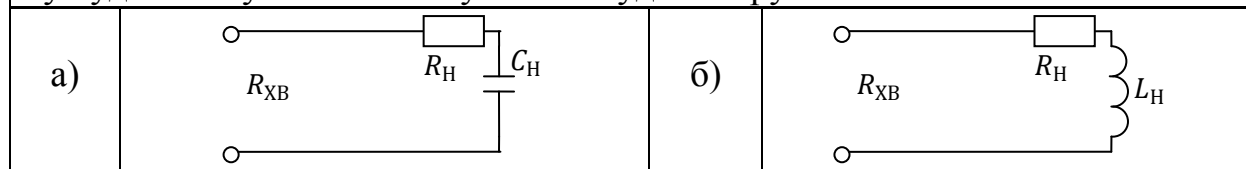


Рисунок 6.11

Відповідь: а)  $\varphi_{\text{чисел.}} - \varphi_{\text{знам.}} < 0$ , то першим буде  $U_{\min}$ ;

б)  $\varphi_{\text{чисел.}} - \varphi_{\text{знам.}} > 0$ , то першим буде  $U_{\max}$ .

**Задача 6.10.** У лінії без втрат, що працює в усталеному гармонічному режимі, визначити коефіцієнт відбиття за напругою та відношення  $Z_H/Z_{XB}$ ? Відомо, що: а) відстань до першого по порядку максимума від кінця лінії є  $\lambda/8$ , коефіцієнт біжної хвилі КБХ = 1/3; б) відстань до першого по порядку мінімуму від кінця лінії є  $\lambda/4$ , коефіцієнт стійної хвилі КСХ = 4;

Відповідь: а)  $n_u = 0.5j$ ;  $Z_H/Z_{XB} = e^{-j53.13^\circ}$ ; б)  $n_u = 3/5$ ;  $Z_H/Z_{XB} = 0.25$ .

**Задача 6.11.** У лінії без втрат (рис. 6.12) побудувати розподіл напруги від кінця лінії, визначити амплітуду напруги в кінці лінії. Амплітуда напруги у пучності 100 В. Робоча частота довгої лінії є: а)  $f = 30$  МГц; б)  $f = 10$  МГц. Опір в Ом, індуктивність в мкГн, ємність в пФ.

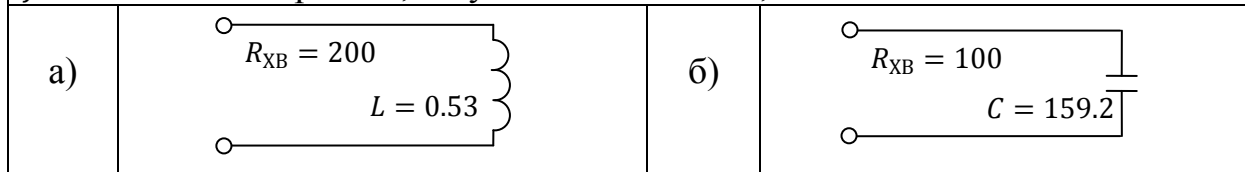


Рисунок 6.12

Відповідь: а)  $u_x = 44.62$  В,  $x_{max} = 1.8$  м,  $x_{min} = 4.5$  м;  
 б)  $u_x = 70.7$  В,  $x_{max} = 11.25$  м,  $x_{min} = 3.75$  м.

**Задача 6.12.** У лінії без втрат із хвильовим опором  $R_{XB} = 25$  Ом визначити величину  $l$ : а) короткозамкненої ділянки, щоб вона була еквівалентна індуктивності  $L = 4.7$  мкГн; б) ділянки у режимі холостого ходу, щоб вона була еквівалентна ємності величиною  $C = 51$  пФ. На робочій частоті довжина хвилі є  $\lambda = 10$  м.

Відповідь: а)  $l = 2$  м, б)  $l = 1$  м.

**Задача 6.13.** У лінії без втрат (рис. 6.13) визначити  $n_u$ , КБХ, відстань до першого по порядку максимуму та мінімуму напруги. Знайти напругу в кінці лінії  $u_H(t)$ . Лінія працює в усталеному гармонічному режимі із  $R_{XB} = 50$  Ом,  $\lambda = 32$  м та опором  $Z_H$  Ом. Падаюча напруга в кінці лінії є: а)  $u_{II}(t) = 200 \cos(\omega t + 45^\circ)$  В; б)  $u_{II}(t) = 200 \cos(\omega t + 30^\circ)$  В. Опори на схемі подані в Ом.

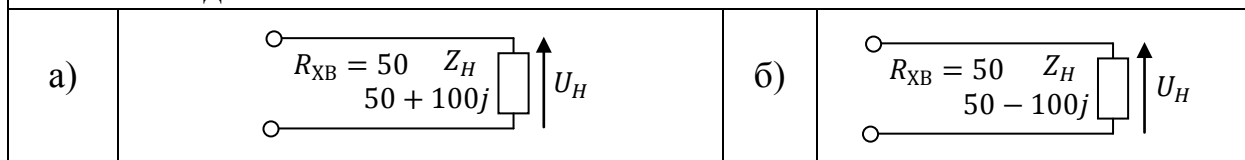


Рисунок 6.13

Відповідь: а)  $n_u = e^{j45^\circ}/\sqrt{2}$ ; КБХ = 0.171,  $x_{max} = 2$  м;  $x_{min} = 10$  м,  
 $u_H(t) = 100\sqrt{10} \cos(\omega t + 63.5^\circ)$  В;  
 б)  $n_u = e^{-j45^\circ}/\sqrt{2}$ ; КБХ = 0.171,  $x_{max} = 12$  м;  $x_{min} = 20$  м,  
 $u_H(t) = 100\sqrt{2} \cos(\omega t + 75^\circ)$  В.

**Задача 6.14.** У лінії без втрат визначити коефіцієнт відбиття за напругою, КБХ та хвильовий опір лінії. Для лінії були одержані графіки розподілу амплітуд струмів та напруг (рис. 4.14). Напруга вимірюється у вольтах, струм у амперах, відлік координати «х» йде від навантаження.

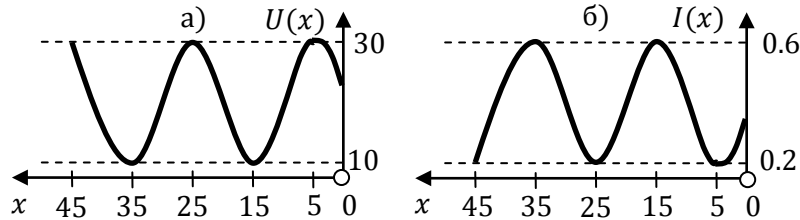


Рисунок 6.14

Відповідь:  $n_u = 0.5j$ ,  $Z_{ХВ} = 50 \text{ Ом}$ .

**Задача 6.15.** У лінії без втрат визначити амплітуду напруги у навантаженні  $U_H$ . Для лінії одержаний графік розподілу амплітуди напруги від довжини лінії (рис. 6.15). Напруга вимірюється у вольтах, відлік координати «х» йде від навантаження. Відомо, що а) опори  $R_{ХВ} = 50 \text{ Ом}$ ,  $Z_H = 50e^{j53^\circ} \text{ Ом}$ ; б) опори  $R_{ХВ} = 16 \text{ Ом}$ ,  $Z_H = 40e^{-j38^\circ} \text{ Ом}$ .

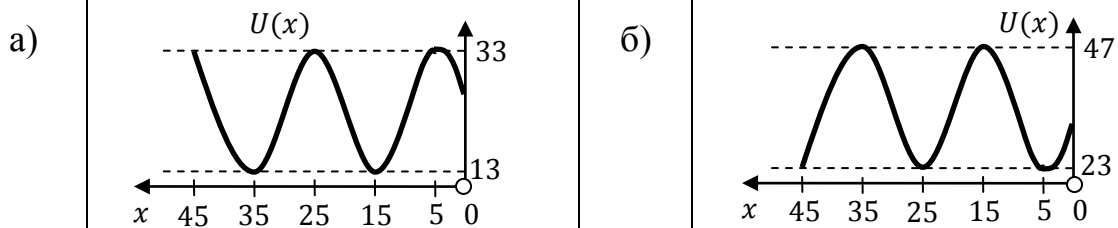


Рисунок 6.15

Відповідь: а)  $U_H = 25.08 \text{ В}$ ; б)  $U_H = 45.75 \text{ В}$ .

### 6.2.3. Чвертьхвильові лінії

**Задача 6.16.** Яким повинний бути хвильовий опір  $R_{ХВ.1}$  лінії без втрат (рис. 6.16), щоб у лінії був режим біжних хвиль? До цієї лінії за допомогою відрізків  $\lambda/4$  підключені два опори  $R_1$  та  $R_2$ . Хвильові опори цих відрізків однакові і є  $R_{ХВ.2} = 100 \text{ Ом}$ . На схемі опори подані в Ом.

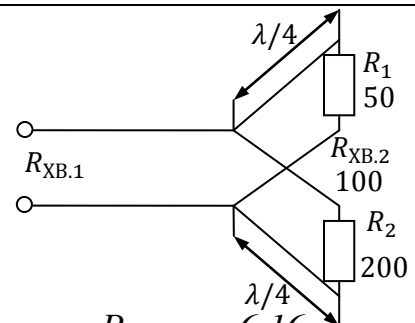


Рисунок 6.16

Відповідь:  $R_{ХВ.1} = 40 \text{ Ом}$ .

**Задача 6.17.** Яким повинний бути вхідний опір відрізка  $Z_{\text{ВХ}}(\frac{5\lambda}{4})$  лінії без втрат (рис. 6.17)? До цього відрізка із хвильовим опором  $R_{\text{ХВ.1}}$  за допомогою шлейфів довжиною  $\lambda/4$  підключені опори або закоротка. Хвильовий опори цих шлейфів однакові  $R_{\text{ХВ.2}}$ . Опори задані в Ом.

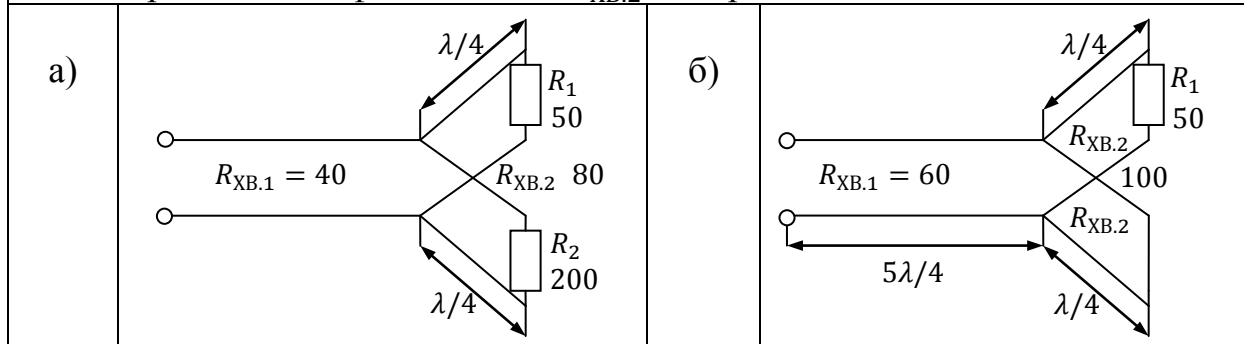


Рисунок 6.17

Відповідь: а)  $Z_{\text{ВХ}}(\frac{5\lambda}{4}) = 62.75 \text{ Ом}$ ; б)  $Z_{\text{ВХ}}(\frac{5\lambda}{4}) = 18 \text{ Ом}$ .

**Задача 6.18.** Яким повинний бути вхідний опір відрізка  $Z_{\text{ВХ}}(\frac{9\lambda}{4})$  лінії без втрат (рис. 6.18)? До цього відрізка із хвильовим опором  $R_{\text{ХВ.1}} = 75 \text{ Ом}$  за допомогою шлейфів довжиною  $\lambda/4$  підключені опір  $R_1 = 40 \text{ Ом}$  та розрив. Хвильовий опори цих шлейфів однакові і складають  $R_{\text{ХВ.2}} = 60 \text{ Ом}$ .

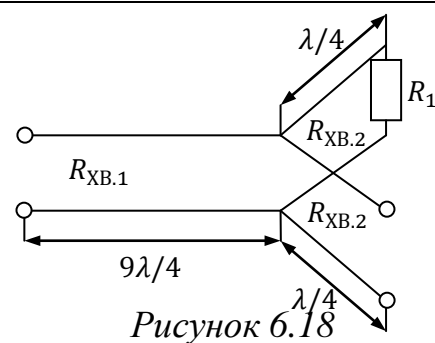


Рисунок 6.18

Відповідь:  $Z_{\text{ВХ}}(\frac{9\lambda}{4}) = \infty$ .

**Задача 6.19.** Яким повинний бути хвильовий опір  $R_{\text{ХВ.3}}$  лінії без втрат (рис. 6.19), щоб у лінії був режим біжних хвиль? До цієї лінії за допомогою відрізків  $\lambda/4$  підключені два опори  $R_1$  та  $R_2$ . Хвильові опори цих відрізків однакові і становлять  $R_{\text{ХВ.2}} = 70 \text{ Ом}$  та  $R_{\text{ХВ.3}}$ . Опори в Ом.

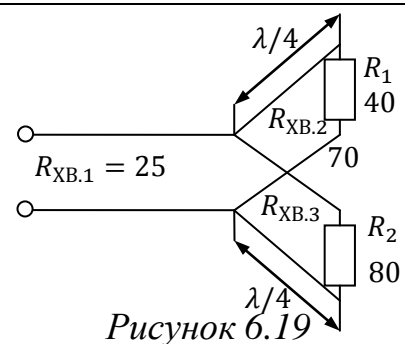


Рисунок 6.19

Відповідь:  $R_{\text{ХВ.3}} = 53 \text{ Ом}$ .

### 6.2.4. Складні розподіли

**Задача 6.20.** У довгій лінії без втрат (рис. 6.20) визначити  $R_H$ , побудувати розподіли  $u(x)$  та  $i(x)$ . Лінія узгоджена із навантаженням чвертьхвильовим трансформатором із хвильовим опором  $R_{XB2}$ . Відомо, що: а) погонні параметри лінії:  $L_0 = 2 \cdot 10^{-6}$  Гн/м,  $C_0 = 8 \cdot 10^{-12}$  Ф/м;  $R_H = 4R_{XB1}$ , напруга  $U_H = 400$  В; б) погонні параметри лінії:  $L_0 = 1.67 \cdot 10^{-6}$  Гн/м,  $C_0 = 6.67 \cdot 10^{-12}$  Ф/м;  $R_{XB2} = 250$  Ом, напруга  $U_H = 300$  В.

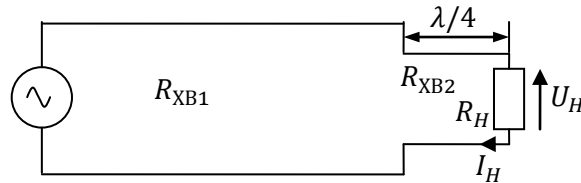


Рисунок 6.20

Відповідь: а)  $R_H = 2$  кОм; б)  $R_H = 125$  Ом.

**Задача 6.21.** У лінії без (рис. 6.21) втрат побудувати розподіли  $u(x)$  та  $i(x)$ . На відстані  $\lambda/4$  від навантаження підключений опір  $R_1$ . Відомо, що  $R_{XB} = R_1 = R_H$ . Отже, а) опір  $R_H = 60$  Ом, напруга  $U_H = 100$  В; б) опір  $R_H = 40$  Ом, струм  $I_H = 4$  А.

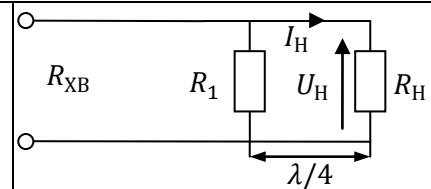


Рисунок 6.21

Відповідь: а)  $U_{min} = 100$  В,  $U_{max} = 200$  В,  $I_{min} = 5/3$  А,  $I_{max} = 10/3$  А;  
б)  $U_{min} = 160$  В,  $U_{max} = 320$  В,  $I_{min} = 4$  А,  $I_{max} = 8$  А.

**Задача 6.22.** У лінії без (рис. 6.22) втрат побудувати розподіли  $u(x)$  та  $i(x)$ . На відстані  $\lambda/4$  від навантаження підключений опір  $R_1$ . Відомо, що опори становлять: а)  $R_{XB} = 10$  Ом,  $R_H = 30$  Ом,  $R_1 = 24$  Ом, напруга  $U_H = 9$  В; б)  $R_{XB} = 40$  Ом,  $R_H = 20$  Ом,  $R_1 = 48$  Ом, струм  $I_H = 6$  А.

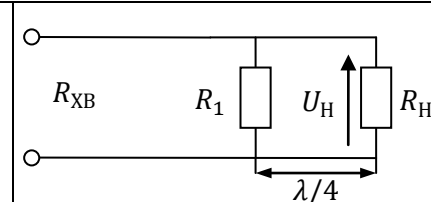


Рисунок 6.22

Відповідь: а)  $U_{min} = 3$  В,  $U_2 = 9$  В,  $U_{max} = 10$  В,  $I_{min} = 0.3$  А,  
 $I_2 = 0.9$  А,  $I_{max} = 1$  А;  
б)  $U_{min} = 120$  В,  $U_2 = 180$  В,  $U_{max} = 240$  В,  $I_{min} = 3$  А,  
 $I_2 = 6$  А,  $I_2 = 8$  А,  $I_{max} = 10.7$  А.

**Задача 6.23.** До лінії без втрат із хвильовим опором  $R_{\text{ХВ}}$  підключені опори навантаження (рис. 6.23). Амплітуда напруги у навантаженні  $U_2$ . Побудувати розподіл амплітуди струму вздовж лінії від навантаження на відстані  $3\lambda$ , якщо опори  $R_1 = R_2 = R_{\text{ХВ}}$ ,  $R_3 = 2R_{\text{ХВ}}$ .

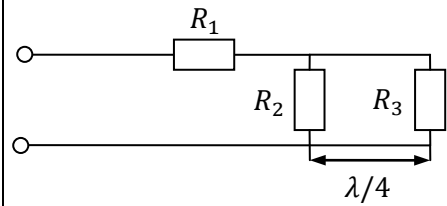


Рисунок 6.23

Відповідь:  $U_{\min} = 0.5U_2$ ,  $U_{\max} = 2U_2$ ,  $I_{\min} = I_2$ ,  $I_{\max} = 4I_2$ .

### 6.2.5. Узгодження лінії з навантаженням

**Задача 6.24.** До відрізка лінії без втрат із хвильовим опором  $R_{\text{ХВ}} = 50$  Ом підключений опір навантаження  $R_{\text{Н}} = 100$  Ом. Якою повинна бути довжина  $S$  відрізка, щоб в усталеному гармонічному режимі при довжині хвилі  $\lambda = 10$  м виконувалася умова  $\text{Re}[Z_{\text{ВХ}}] = R_{\text{ХВ}}$ .

Відповідь:  $S = 0.98$  м.

**Задача 6.25.** У лінії без втрат із хвильовим опором  $R_{\text{ХВ}} = 90$  Ом визначити опір навантаження  $R_{\text{Н}}$ , щоб на відстані  $S = 2$  м виконувалася умова  $\text{Re}[Z_{\text{ВХ}}] = R_{\text{ХВ}}$  (рис. 6.24). На робочій частоті довжина хвилі є  $\lambda = 3$  м.

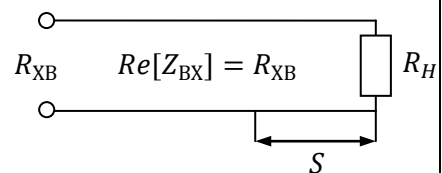


Рисунок 6.24

Відповідь:  $R_{\text{Н}} = 30$  Ом;  $R_{\text{Н}} = 90$  Ом.

**Задача 6.26.** У лінії (рис. 6.25) визначити місце ввімкнення шлейфу  $S$  та довжину шлейфу  $l$ . Лінія без втрат із хвильовим опором  $R_{\text{ХВ}} = 50$  Ом у гармонічному режимі повинна бути узгоджена із активним навантаженням  $R_{\text{Н}} = 250$  Ом. На робочій частоті довжина хвилі становить  $\lambda = 3$  м.

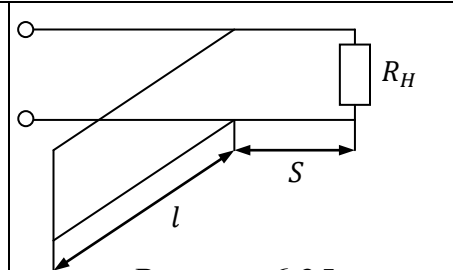


Рисунок 6.25

Відповідь:  $S = 0.55$  м,  $l = 0.448$  м.

**Задача 6.27.** У лінії (рис. 6.26) визначити місце ввімкнення короткозамкненого шлейфу  $S$  довжиною  $l = 0.4$  м, щоб лінія була узгоджена. Лінія має хвильовий опір  $R_{\text{ХВ}} = 25$  Ом, опір навантаження  $R_{\text{Н}} = 100$  Ом. На робочій частоті довжина хвилі є  $\lambda = 6$  м.

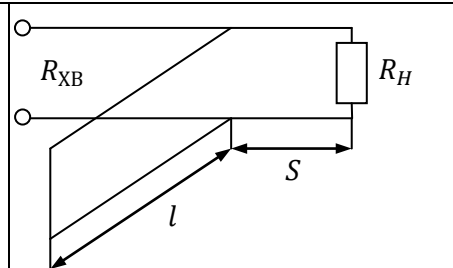


Рисунок 6.26

Відповідь:  $S_1 = 1.5$  м,  $S_2 = 0.084$  м.

### 6.2.6. Перехідні процеси у довгих лініях

**Задача 6.28.** У лінії без втрат із опором навантаженням  $R_H$  після комутації (рис. 6.27) зобразити напругу  $u_{\text{вих}}(t)$  та для проміжку  $0 \leq t < 9S/V$ , де  $S$  – довжина лінії. Пояснити етапи побудови. Вважати, що довжина лінії та швидкість поширення хвилі відомі. Написати та побудувати вирази напруги  $u(t, 0.5S)$ ,  $u(t, S)$ .

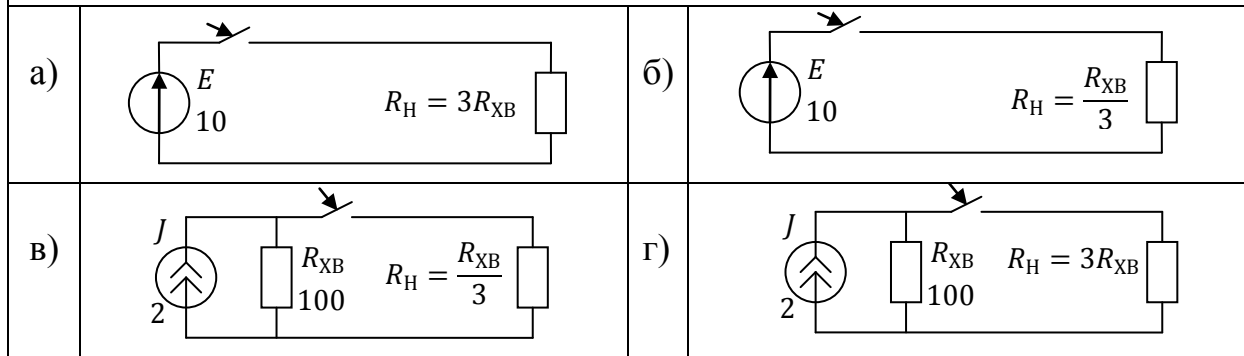


Рисунок 6.27

Відповідь: графік розподілу.

**Задача 6.29.** У лінії без втрат (рис. 6.28) після комутації визначити та побудувати  $u(t, 300)$ ,  $u(t, 600)$ . Відомо, що напруга  $E = 10$  В, довжиною  $S = 600$  м із хвильовим опором  $R_{XB} = 100$  Ом. Вважати, що швидкість поширення хвилі дорівнює швидкості світла.

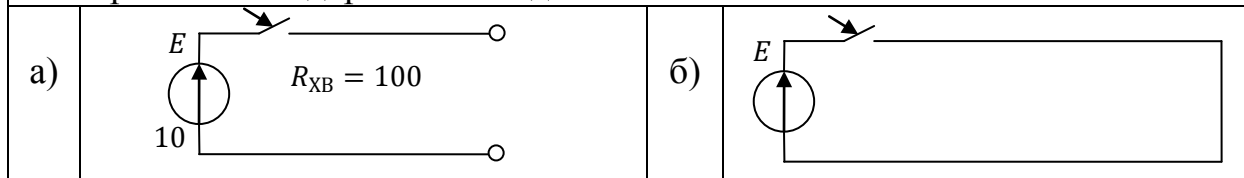
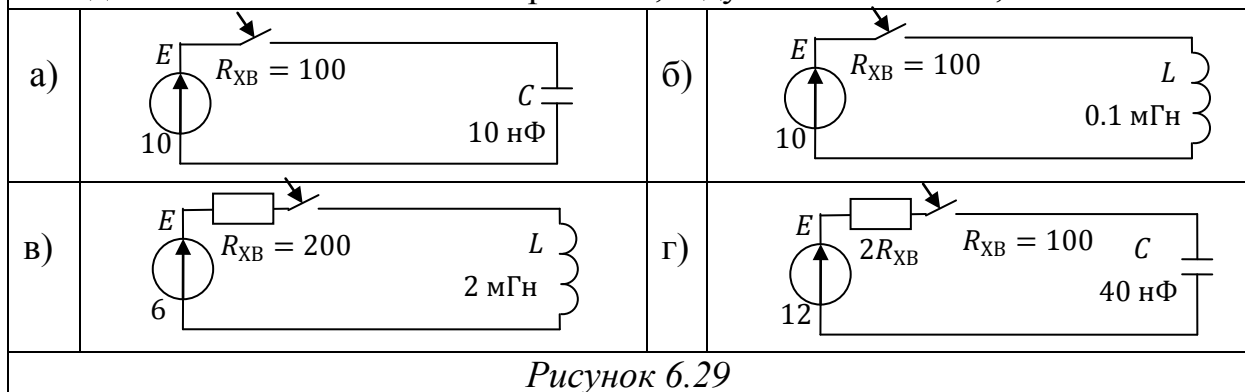


Рисунок 6.28

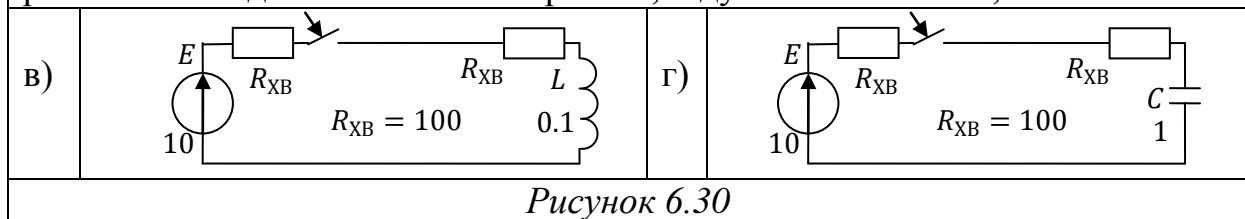
Відповідь: графік розподілу.

**Задача 6.30.** У лінії без втрат (рис. 6.29) після комутації визначити та побудувати  $u_{\text{ВІД}}(t)$ . Вважати, що швидкість поширення хвилі дорівнює швидкості світла. На схемі: опори в Ом, індуктивність в мГн, ємність в нФ.



Відповідь: а)  $u_{\text{ВІД}}(t) = 10 - 20e^{-t}$  В; б)  $u_{\text{ВІД}}(t) = -10 + 20e^{-t}$  В;  
 в)  $u_{\text{ВІД}}(t) = -3 + 6e^{-0.1t}$  В; г)  $u_{\text{ВІД}}(t) = 4 - 8e^{-0.25t}$  В.

**Задача 6.31.** У лінії без втрат (рис. 6.30) після комутації знайти та побудувати напругу  $u_{\text{ВІД}}(t)$ . Вважати, що довжина лінії та швидкість поширення хвилі відомі. На схемі: опір в Ом, індуктивність в мГн, ємність в нФ.



Відповідь: а)  $u_{\text{ВІД}}(t) = 5e^{-2t}$  В; б)  $u_{\text{ВІД}}(t) = 5 - 5e^{-0.5t}$  В.



## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Збірник задач з дисципліни «Основи теорії кіл» для студентів радіотехнічного факультету спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / Укладачі: А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 122с.
2. Бычков Ю. А. Сборник задач и практикум по основам теории цепей / Ю. А. Бычков, В. М. Золотницкий, Э. П. Чернышев. – 2-е изд. – СПб.: Питер, 2007. – 300с.
3. Методичні рекомендації до підготовки к вступним іспитам в магістратуру за спеціальністю «Радіоелектронні пристрої, системи та комплекси» з дисципліни «Основи теорії кіл» для студентів радіотехнічного факультету / Уклад.: М.І. Ястребов, - К.: НТУУ "КПІ", 2015. – 72 с.
4. Основи теорії кіл. Підготовка до фахового вступного випробування [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А. В. Булашенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 1.43 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 100 с.
5. Основи теорії кіл: підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч.1 / Ю. О. Коваль, Л. В. Гринченко, І. О. Мілютченко, О.І. Рибіна; за аг. Редакцією В.М. Шокала та В. І. Правди. – Х.: Компанія Сміт, 2008. – 432 с.
6. Основы теории электронных схем / В.П. Сигорский, А.И. Петренко. – К.: Вища школа, 1971. – 568с.
7. Основи теорії кіл. Розрахунок лінійних електричних кіл постійного струму. Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А. В. Булашенко, М.І. Ястребов; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 5.65 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 62с.
8. Методичні вказівки до практичних занять на тему «Розрахунок лінійних електричних кіл змінного струму» з дисципліни «Основи теорії кіл» для студентів радіотехнічного факультету, спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / Укладачі: А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 42с.
9. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Основи теорії кіл» на тему «Розрахунок поодиноких коливальних контурів» для студентів радіотехнічного факультету спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / Укладачі: А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 38с.
10. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Основи теорії кіл» на тему «Розрахунок довгих ліній» для студентів радіотехнічного факультету, спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / Укладачі: А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 34с.

11. Основи теорії кіл. Практикум. Розрахунок схемних функцій, чотириполюсників та операторний метод простих кіл [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А. В. Булашенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 5.65 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 65с.
12. Основи теорії кіл. Розрахунок лінійних електричних кіл змінного струму. Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А. В. Булашенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 1.31 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 48 с.
13. Шебес М. Р. Задачник по теории электрических цепей: учебное пособие для электротехнических, радиотехнических специальностей вузов / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1990. – 544с.
14. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: учеб. пособие для вузов / под ред. проф. П. А. Ионкина. – М.: Энергоиздат, 1982. – 768с.
15. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: учеб. пособие для энерг. и приборостр. спец. вузов. – 4-е изд., перераб. и испр. / под ред. Л. А. Бесснова. – М.: Высш. шк., 2003. – 528с.
16. Пономаренко В. К. Пособие к практическим занятиям по теории электрических цепей: учеб. пособие – 2-е изд., перераб. и доп. – Озерск: ОТИ МИФИ, 2001. – 200с.
17. Атабеков Г. И. Основы теории цепей. – М.: Энергия, 1969. – 424с.
18. Зевеке Г.В. Основы теории цепей: учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин и др. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
19. Основи теорії та комп'ютерне моделювання електронних кіл: навчальний посібник [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / В. Д. Сташук, А.В. Булашенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 6.58 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 400с.
20. Булашенко А.В. Побудова векторних діаграм за допомогою математичного пакету MathCAD / А.В. Булашенко // Науково-методична конференція викладачів, співробітників і студентів : тези доповідей, 27 квітня 2010 року / Конотопський ін-т СумДУ; Відп. за вип. Н.В. Барбара, О.С. Заїка. — Суми : СумДУ, 2010. – Ч.2. – С. 10-13.
21. Методичні вказівки до виконання роз.-граф. роботи № 1 для студентів напряму підготовки «Радіотехніка» з дисципліни «Основи теорії кіл» / Укладачі А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 56с.

## ДОДАТОК А

### Тригонометричні формули

1. Формули додавання аргументів:

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y; \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \pm \sin x \sin y; \\ \operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}; \quad \operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}.\end{aligned}$$

2. Формули Ейлера:

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}; & \cos x &= \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}; \\ e^{jx} &= \cos x + j \sin x; & e^{-jx} &= \cos x - j \sin x.\end{aligned}$$

3. Деякі значення тригонометричних функцій наведені у таблиці А.1

Таблиця А.1

Кут $x$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
0	0	1	0	-
$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	-	0
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1
$5\pi/6$	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
$\pi$	0	-1	0	-
$2\pi$	0	1	0	-

4. Формули зведення

Аргумент $\beta$	Тригонометричні функції			
	$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{ctg} \beta$
$\alpha + \pi/2$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\alpha + \pi$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\alpha + 3\pi/2$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\alpha + 2\pi$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$-\alpha + \pi/2$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$-\alpha + \pi$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$-\alpha + 3\pi/2$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$-\alpha + 2\pi$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

Формула інтегрування частинами

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x).$$

Суть методу: якщо підінтегральна функція представлена у вигляді добутку двох неперервних та гладких функцій (кожна з яких може бути як елементарною функцією, так і композицією).

## ДОДАТОК Б

### Формули диференціювання

#### Правила диференціювання

Нехай задані диференційовані функції  $U = u(x)$ ,  $V = v(x)$

1. Похідна алгебраїчної суми кінцевого числа диференційованих функцій дорівнює сумі похідних цих функцій

$$\frac{d}{dx}[U \pm V] = \frac{d}{dx}[U] \pm \frac{d}{dx}[V].$$

2. Похідна добутку двох диференційованих функцій дорівнює сумі добутку похідної першого співмножника на другий та добутку похідної другого співмножника на перший:

$$\frac{d}{dx}[U \cdot V] = \frac{d}{dx}[U] \cdot V + \frac{d}{dx}[V] \cdot U.$$

3. Похідна частки визначається виразом

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{U}{V}\right] = \frac{\frac{d}{dx}[U] \cdot V - \frac{d}{dx}[V] \cdot U}{V^2}.$$

Таблиця похідних деяких функцій

Функція	Похідна функції	Функція	Похідна функції
$\sin x$	$\cos x$	$x^c$	$cx^{c-1}$
$\cos x$	$-\sin x$	$ x $	$\operatorname{sign} x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{x^c}$	$-\frac{c}{x^{c+1}}$
$e^x$	$e^x$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\log_a x$	$\frac{\log_a e}{x}$	$c^x$	$c^x \ln c$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcsec} x$	$\frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$	$\arccos x$	$\frac{-1}{ x \sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$

## ДОДАТОК В

Таблиця інтегралів

Значення функції	Значення первісної	Значення функції	Значення первісної
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$e^x$	$e^x$	$a^x, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{cth} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{x^2-1}$	$\frac{1}{2} \ln \left  \frac{x-1}{x+1} \right $

## Схемні функції

Коефіцієнт передачі за струмом:

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$K_i = \frac{I_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}$	$K_i = \frac{I_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Y_H$

Коефіцієнт передачі за напругою:

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$K_u = \frac{U_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Z_H$	$K_u = \frac{U_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}$

Передавальна провідність

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$Y_{ba} = \frac{I_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}$	$Y_{ba} = \frac{I_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} \cdot Y_H$

Передавальний опір

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$Z_{ba} = \frac{U_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} \cdot Z_H$	$Z_{ba} = \frac{U_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}$

Вхідний опір

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$Z_{BX} = \frac{U_{BX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta}{\Delta_{aa}}$	$Z_{BX} = \frac{U_{BX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta}$

## ДОДАТОК Г

### Системи параметрів чотириполіусників

У силу лінійності можна написати шість систем рівнянь, що зв'язують між собою струми та напруги на вході та виході чотириполіусника (рис. Д.1).

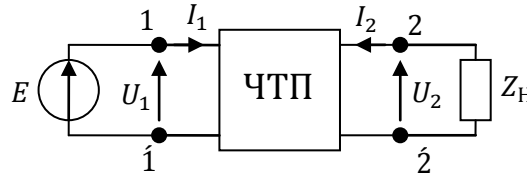


Рисунок Д.1

Система  $Y$  – параметрів чотириполіусників

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

Система  $Z$  – параметрів чотириполіусника

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2, \\ U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Система  $h$  – параметрів чотириполіусника

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} \cdot I_1 + h_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = h_{21} \cdot I_1 + h_{22} \cdot U_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

Система  $A$  – параметрів чотириполіусника

$$\begin{cases} U_1 = A_{11} \cdot U_2 + A_{12} \cdot I_2, \\ I_1 = A_{21} \cdot U_2 + A_{22} \cdot I_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Коли розглядаються  $A$  - параметри, вихідний  $I_2$  струм направляють назовні.

Система  $B$  – параметрів чотириполіусника

$$\begin{cases} U_2 = B_{11} \cdot U_1 + B_{12} \cdot I_1, \\ I_2 = B_{21} \cdot U_1 + B_{22} \cdot I_1; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}.$$

Система  $F$  – параметрів чотириполіусника

$$\begin{cases} I_1 = F_{11} \cdot U_1 + F_{12} \cdot I_2, \\ U_2 = F_{21} \cdot U_1 + F_{22} \cdot I_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Схеми заміщення пасивних чотириполіусників (рис. Д.2).

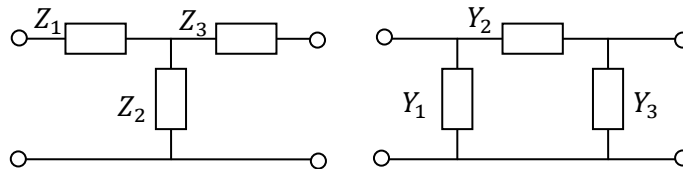


Рисунок Д.2

Для Т-подібної схеми заміщення (рис. Д.2 а) складають матрицю опорів

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}.$$

Для П-подібної схеми заміщення (рис. Д.2 б) складають матрицю провідностей

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & Y_2 \\ Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}.$$

## ДОДАТОК Д

## Таблиця перетворення Лапласа

Таблиця К.1 - Зображення та оригінал деяких функцій

Оригінал	Зображення	Оригінал	Зображення
1	$\frac{1}{p}$	$(1 - at)e^{\pm at}$	$\frac{p}{(p \mp a)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p(p + a)}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{p \mp a}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{\pm j\omega_0 t}$	$\frac{1}{p \mp j\omega_0}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{\pm j(\omega_0 t + \varphi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p \mp j\omega_0}$	$\sin(\omega_0 t + \psi)$	$\frac{p \cdot \sin(\psi) + \omega_0 \cdot \cos(\psi)}{p^2 + \omega_0^2}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(p + a)^2}$	$e^{-at} \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(p + a)^2 + \omega_0^2}$
$\frac{1}{\alpha - \beta}(e^{\beta t} - e^{\alpha t})$	$\frac{1}{(p + \alpha)(p + \beta)}$	$e^{-at} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega_0^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\cos(\omega_0 t + \varphi)$	$\frac{p \cdot \cos(\varphi) - \omega_0 \cdot \sin(\varphi)}{p^2 + \omega_0^2}$
ch(at)	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	sh(at)	$\frac{a}{p^2 + a^2}$
$\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$	$\frac{1}{p(p - a)}$	$1 - e^{-t/a}$	$\frac{1}{p(1 + ap)}$
$\frac{1}{a^2}te^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{(1 + ap)^2}$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(p - a)(p - b)}$
$(1 + at)e^{at}$	$\frac{p}{(p - a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(e^{at} - 1 - at)$	$\frac{1}{(p - a)p^2}$
$\frac{1}{2}t^2e^{at}$	$\frac{1}{(p - a)^3}$	$(t + \frac{1}{2}at^2)e^{at}$	$\frac{p}{(p - a)^3}$
$\cos^2(at)$	$\frac{p^2 + 2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$	$\sin^2(at)$	$\frac{2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$
ch <sup>2</sup> (at)	$\frac{p^2 - 2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$	sh <sup>2</sup> (at)	$\frac{2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$

## ДОДАТОК Ж

### Зв'язок між параметрами чотириполосника

	$[Z]$	$[Y]$	$[H]$
$[Z]$	$\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_Y} \begin{vmatrix} Y_{22} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{11} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{H_{22}} \begin{vmatrix} \Delta_H & H_{12} \\ -H_{21} & 1 \end{vmatrix}$
$[Y]$	$\frac{1}{\Delta_Z} \begin{vmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{H_{11}} \begin{vmatrix} 1 & -H_{12} \\ H_{21} & \Delta_H \end{vmatrix}$
$[H]$	$\frac{1}{Z_{22}} \begin{vmatrix} \Delta_Z & -Z_{12} \\ -Z_{21} & 1 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{Y_{11}} \begin{vmatrix} 1 & -Y_{12} \\ -Y_{21} & \Delta_Y \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix}$
$[F]$	$\frac{1}{Z_{11}} \begin{vmatrix} 1 & -Z_{12} \\ Z_{21} & \Delta_Z \end{vmatrix}$	$\frac{1}{Y_{22}} \begin{vmatrix} \Delta_Y & Y_{12} \\ -Y_{21} & 1 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_H} \begin{vmatrix} H_{22} & -H_{12} \\ H_{21} & H_{11} \end{vmatrix}$
$[A]$	$\frac{1}{Z_{21}} \begin{vmatrix} Z_{11} & \Delta_Z \\ 1 & Z_{22} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{Y_{21}} \begin{vmatrix} -Y_{22} & -1 \\ -\Delta_Y & Y_{11} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{H_{21}} \begin{vmatrix} -\Delta_H & H_{11} \\ -H_{22} & 1 \end{vmatrix}$
$[B]$	$\frac{1}{Z_{12}} \begin{vmatrix} Z_{22} & \Delta_Z \\ 1 & Z_{11} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{Y_{12}} \begin{vmatrix} -Y_{11} & -1 \\ -\Delta_Y & -Y_{22} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{H_{21}} \begin{vmatrix} 1 & -H_{11} \\ H_{22} & \Delta_H \end{vmatrix}$

	$[F]$	$[A]$	$[B]$
$[Z]$	$\frac{1}{F_{11}} \begin{vmatrix} 1 & -F_{12} \\ F_{21} & \Delta_F \end{vmatrix}$	$\frac{1}{A_{21}} \begin{vmatrix} -A_{11} & \Delta_A \\ 1 & A_{22} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{B_{21}} \begin{vmatrix} B_{22} & 1 \\ \Delta_B & B_{11} \end{vmatrix}$
$[Y]$	$\frac{1}{F_{22}} \begin{vmatrix} \Delta_F & F_{12} \\ -F_{21} & 1 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{A_{12}} \begin{vmatrix} A_{22} & \Delta_A \\ -1 & A_{11} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{B_{12}} \begin{vmatrix} B_{11} & -1 \\ -\Delta_B & B_{22} \end{vmatrix}$
$[H]$	$\frac{1}{\Delta_F} \begin{vmatrix} F_{22} & -F_{12} \\ -F_{21} & F_{11} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{A_{11}} \begin{vmatrix} A_{21} & \Delta_A \\ -1 & A_{12} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{B_{11}} \begin{vmatrix} B_{12} & 1 \\ -\Delta_B & B_{21} \end{vmatrix}$
$[F]$	$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{A_{11}} \begin{vmatrix} A_{21} & -\Delta_A \\ 1 & A_{12} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{B_{22}} \begin{vmatrix} B_{21} & -1 \\ \Delta_B & B_{12} \end{vmatrix}$
$[A]$	$\frac{1}{F_{21}} \begin{vmatrix} 1 & F_{22} \\ F_{11} & \Delta_F \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_B} \begin{vmatrix} B_{22} & B_{12} \\ B_{21} & B_{11} \end{vmatrix}$
$[B]$	$\frac{1}{F_{12}} \begin{vmatrix} -\Delta_F & -F_{22} \\ -F_{11} & -1 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_A} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & A_{11} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix}$